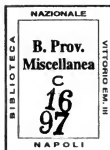


CHELINI
SISTEMI
DI COORDINATE

N. 43



**SULLA TEORIA
DE' SISTEMI SEMPLICI DI COORDINATE**

**E SULLA DISCUSSIONE
DELL' EQUAZION GENERALE DI SECONDO GRADO
IN
COORDINATE TRIANGOLARI E TETRAEDRICHE
MEMORIA**

**DEL
PROF. DOMENICO CHELINI**



*(Estratta dal Vol. III. Ser. II. delle Memorie dell' Accademia
delle Scienze dell' Istituto di Bologna).*



BOLOGNA
TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI
1863

Letta nella Sessione del 16 Aprile 1863.



Quando, ne' moti geometrici, la posizione sia di un punto, sia di una retta, sia di un piano si fa dipendere da certe quantità variabili le quali, per ogni *dato sistema delle loro grandezze*, siano acconce a fissare la detta posizione; queste quantità variabili si dicono in corrispondenza *coordinate del punto, coordinate della retta, coordinate del piano*. I sistemi di coordinate già in uso sono diversi e numerosi, e possono distinguersi in *sistemi semplici* ed in *sistemi complessi*.

L'oggetto precipuo di questo scritto si è di mettere in chiaro la natura de' sistemi semplici ed i rapporti che hanno col PRINCIPIO DELLA RISULTANTE, cioè della *retta*, o dell' *area*, *la cui proiezione sopra un asse qualsivoglia, o sopra un piano, è uguale alla somma delle proiezioni omologhe di più rette od aree date*, chiamate *componenti*. Il principio della risultante, contenuto nella proprietà tutta geometrica espressa dalla sua medesima definizione ed in quelle che ne sono le conseguenze immediate, costituisce (secondo che a me pare) un vero metodo, e forse il metodo più

semplice e diretto che possa darsi per dimostrare e scoprire le formole fondamentali sia della trigonometria piana e sferica, sia della geometria analitica finita ed infinitesimale (*). Ho quindi creduto che si farebbe cosa di qualche vantaggio al progresso dell'insegnamento, richiamando a questo metodo quei sistemi semplici di coordinate di cui si è arricchita la geometria moderna per opera principalmente dei Sigg. LÜCKER, MÖBIUS, CHASLES.

Ed a raggiungere un tale scopo con ordine e chiarezza, premessa la definizione generale de' sistemi semplici, svolgo dapprima ed espongo quelle proprietà sì della retta, sì

(*) Fino dal 1831, essendo in Roma addetto all'insegnamento delle matematiche nel Collegio Nazareno, mi avvenne di notare la fecondità di questo principio (fecondità che parmi venire principalmente dal modo con cui preparo e stabilisco la definizione geometrica della risultante); e ne feci l'oggetto di una Memoria che lessi nell'Accademia de' Lincei, e che qualche anno dopo, cioè nel 1837 e 1838, pubblicai nel Giornale Arcadico sotto il titolo: *Saggio di geometria analitica trattata con nuovo metodo*. Quanto all'idea di comporre le rette come le forze e le aree come le coppie, ho in appresso riconosciuto che non era nuova (Si veda nel tom. VI della CORRISPONDENZA MATEMATICA E FISICA DI M. QUETELET, an. 1830, — *Mémoire de géométrie pure sur les systèmes des forces et les systèmes d'aires planes, et sur les polygones, les polyèdres et les centres des moyennes distances* par M. CHASLES; Nel tom. IV degli ANN. DI GERBONNE, an. 1813 e 1814. — *Nouveaux principes de géométrie de position et interpretation géométrique des symboles imaginaires* par M. J. FRANÇAIS, — *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires* par M. ARGAST; e degli ANNALI DEL FUSINIERI, an. 1835, — *Calcolo delle equipollenze* del Sig. GIUSTO BELLAVITIS). Ciò che mi sembra meritevole di qualche attenzione, e che ignoro se altri ancora abbia messo in rilievo, si è il metodo semplice e pressochè intuitivo con cui dalla definizione, quale si è da me posta, della risultante si deducono e svolgono le verità più essenziali ed importanti della geometria. Mi sia lecito di citare in proposito le seguenti Memorie, delle quali le prime quattro sono nella CORRISPONDENZA SCIENTIFICA di Roma — *Sulla curvatura delle linee e delle superficie*, tom. I. an. 1845; *Sopra uno de' tre principii che formano l'anello di unione tra l'Algebra e le diverse parti delle matematiche* (formole fondamentali della trigonometria piana e sferica) tom. II. an. 1846; *Sui centri de' sistemi geometrici* (centri di gravità e centri armonici), tom. V, an. 1849; *Sull'uso sistematico de' principii relativi al metodo delle coordinate rettilinee*, tom. V. an. 1849; — *Sulle formole fondamentali riguardanti la curvatura delle linee e delle superficie*, ANNALI DI TORTOLINI, an. 1853; — *Sui principii fondamentali delle Matematiche* (nell'Appendice alla Meccanica Razionale, Bologna 1860).

dell' area e sì del punto risultante, che servono a manifestare gl' intimi rapporti di siffatti sistemi tra loro. Inoltre per evitare le circonlocuzioni, anzichè ricorrere all' uso di vocaboli nuovi, mi valgo delle denominazioni di cui si vale la statica per esprimere le stesse formole quando si suppone che le rette rappresentino *forze*, e che i punti siano gravati da *pesi*. Con ciò, non solamente non si macchia nè si offusca la purità della geometria (essendochè tutto è definito, tutto è dimostrato con perfetto rigore geometrico), ma invece si ottiene il vantaggio di rendere la parola più limpida e significativa, di meglio parlare all' immaginazione, e d' introdurre insensibilmente i giovani studiosi alla cognizione della Meccanica.

Stabiliti così i principii che racchiudono le leggi de' sistemi semplici in generale, esaminò successivamente com' esse siano applicabili ai sistemi semplici delle coordinate componenti e proiezioni; al sistema delle coordinate segmentarie, prese e sovr' assi divergenti da un punto e sovr' assi paralleli; ed al sistema delle coordinate triangolari e tetraedriche. In fine mostro quanto per questa via divenga facile e spedita la discussione dell' equazion generale di 2.^o grado in coordinate triangolari, ed in coordinate tetraedriche, o si considerino le curve e le superficie da essa rappresentate come *luogo di punti*, o si considerino come *inviluppo* di rette e di piani.

ARTICOLO I.

DEFINIZIONE DE' SISTEMI SEMPLICI DI COORDINATE,
SIA DI PUNTI, SIA DI RETTE, SIA DI PIANI.

I moti geometrici dovendosi studiare a parte nel piano e nello spazio, comincio dallo stabilire le definizioni precise de' sistemi semplici per l' uno e per l' altro caso.

§ 1.° Sistemi semplici di coordinate nel piano.

Quando i moti geometrici si considerano sopra un piano, le *coordinate di un punto* apparterranno ad un *sistema semplice* se, vincolate da un' equazione di 1.° grado, tale equazione rappresenta una *retta sopra cui si muove il punto al variare delle sue coordinate*.

Similmente, le *coordinate di una retta* apparterranno ad un *sistema semplice* se, vincolate da un' equazione di 1.° grado, tale equazione rappresenta un *punto fisso intorno a cui gira la retta al variare delle sue coordinate*.

TEOR. Se in una equazione di 1.° grado, per es.

$$(a) \quad ax + by + cz = 0,$$

le quantità x, y, z rappresentano le *coordinate semplici di un punto*, i loro coefficienti a, b, c , considerati come *variabili*, rappresenteranno le *coordinate semplici di una retta*; e viceversa.

DIM. La retta dell' equazione (a), sopra cui (per la definizione) si muove il punto xyz , non può riguardarsi come determinata che dai soli valori dati ai coefficienti a, b, c ; cosicchè, variando successivamente questi valori, si ha un' altra retta, e poi un' altra, e così di seguito. Queste rette, ove alle coordinate x, y, z del punto siano stati sostituiti dapprima valori particolari α, β, γ , passeranno tutte necessariamente per siffatto punto; e l' equazione

$$\alpha . a + \beta . b + \gamma . c = 0,$$

al variare di a, b, c , rappresenterà la retta abc che gira intorno al punto fisso $\alpha\beta\gamma$, e però *rappresenterà questo punto fisso medesimo*.

Viceversa: supponiamo che le x, y, z siano *coordinate di una retta*. Il punto fisso dell' equazione (a), intorno a cui (per la definizione) gira la retta xyz , non può riguardarsi come determinato che dai soli valori attribuiti ai coefficienti a, b, c ; cosicchè, variando successivamente

questi valori, si ha un altro punto, e poi un altro, e così di seguito. Siffatti punti, ove alle coordinate x, y, z della retta siano stati sostituiti dapprima valori speciali α, β, γ , giaceranno tutti su questa retta; e l'equazione

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0,$$

al variare di α, β, γ , rappresenterà il punto abc che si muove sulla retta $ab\gamma$, ossia *rappresenterà questa retta medesima*.

Da questo teorema si raccoglie, che ad ogni sistema semplice di coordinate di un punto va sempre unito o *conjugato* un sistema semplice di coordinate di una retta, e viceversa. Nei casi particolari, dato il significato geometrico dell'uno de' *due sistemi conjugati*, si dovrà cercare il significato geometrico dell'altro. E ciò sarà fatto in appresso pe' sistemi semplici più in uso.

• *Applicazione alle curve piane*. I. Se l'equazione

$$(b) \quad f(x, y, z) = 0$$

omogenea rispetto alle coordinate x, y, z , e perciò equivalente a

$$\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y + \frac{df}{dz}z = 0,$$

rappresenta la curva generata dal punto *corrente* xyz , o, come suol dirsi, *il luogo del punto* xyz , l'equazione

$$(b') \quad \frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = 0,$$

- in cui si suppone *dato* un punto qualsivoglia xyz della curva (b), e *corrente* il punto $x'y'z'$, rappresenterà la retta che *tocca* la curva nel dato punto xyz , e questa tangente sarà determinata dai coefficienti $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$.

Infatti se il punto corrente $x'y'z'$ si fa coincidere successivamente co' due punti della curva infinitamente vicini (x, y, z) , $(x + dx, y + dy, z + dz)$, cotesta equazione $(b)'$ rimane soddisfatta; ed è soddisfatta dal primo punto perchè diviene equivalente alla (b) , ed è soddisfatta dal secondo pel significato geometrico della differenziazione.

Così la retta rappresentata dall'equazione $(b)'$, può riguardarsi come una secante che ha riunito in un solo due punti comuni colla curva.

Le rette che da un punto dato o POLO $x'y'z'$ vanno a toccare la curva (b) , hanno i punti di contatto là dove la curva (b) è intersecata dalla LINEA POLARE

$$x' \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + z' \frac{df}{dz} = 0;$$

II. Se l'equazione (b) rappresenta invece una curva *toccata continuamente dalla retta mobile* xyz , o, come suoi darsi, *un involuppo della retta* xyz , l'equazione

$$\frac{df}{dx} x' + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dz} z' = 0,$$

in cui si suppone data una tangente qualsivoglia xyz , rappresenterà co' suoi coefficienti $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ il punto di contatto intorno a cui gira la *retta mobile* $x'y'z'$.

Infatti se la retta mobile $x'y'z'$ si fa coincidere successivamente colle due tangenti consecutive (x, y, z) , $(x + dx, y + dy, z + dz)$, cotesta equazione rimane soddisfatta per la stessa ragione detta di sopra.

Se $x'y'z'$ è una retta qualunque, e si vogliano i punti ov' essa sega la curva (b) , basterà cercare i valori de' rapporti $(x:z)$, $(y:z)$ che verificano le due equazioni omogenee

$$f(x, y, z) = 0, \quad \frac{df}{dx} x' + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dz} z' = 0,$$

(ossia cercare le tangenti comuni alle curve rappresentate da

coteste equazioni). Per ogni sistema di valori così ottenuti si avrà un punto d'incontro $\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$ della retta $x'y'z'$ colla curva (b) .

Che se si domandino le rette che da un punto dato (l, m, n) , ossia dal punto

$$lx + my + nz = 0,$$

vanno a toccare la curva (b) , basterà determinare le rette xyz che soddisfanno simultaneamente alle due equazioni

$$f(x, y, z) = 0, \quad lx + my + nz = 0,$$

ossia basterà determinare i valori de' rapporti $x:z, y:z$ in funzione di l, m, n , e de' coefficienti noti dell'equazione (b) . Per ogni sistema di questi valori, le quan-

tità $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ daranno i punti di contatto delle tangenti che arrivano alla curva dal punto (l, m, n) .

Infine se dall'equazione omogenea

$$f(x, y, z) = 0, \text{ ovvero } \frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y + \frac{df}{dz}z = 0,$$

rappresentante la curva come *inviluppo di rette* xyz , si vuol ricavare l'equazione che rappresenti la stessa curva come *luogo di punti*, de' quali le coordinate ξ, η, ζ siano le *conjugate* di x, y, z ; basterà evidentemente porre dapprima l'equazioni

$$\frac{df}{dx} = \xi, \quad \frac{df}{dy} = \eta, \quad \frac{df}{dz} = \zeta,$$

e poscia per mezzo di esse esprimere i valori delle x, y, z in funzione delle ξ, η, ζ , ed in ultimo sostituirli nell'equazione

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0.$$

Si otterrà in tal guisa una nuova equazione

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

che rappresenterà la curva data come luogo di punti (ξ, η, ζ) .

Il problema inverso si risolve precisamente nel modo medesimo, osservando che nell'equazione

$$\bullet \quad \frac{d\phi}{d\xi} \xi + \frac{d\phi}{d\eta} \eta + \frac{d\phi}{d\zeta} \zeta = 0,$$

che rappresenta la curva come luogo di punti, i coefficienti

$\frac{d\phi}{d\xi}, \frac{d\phi}{d\eta}, \frac{d\phi}{d\zeta}$ sono proporzionali alle coordinate x, y, z

della retta che tocca la curva nel punto $\xi\eta\zeta$.

§ 2.° Sistemi semplici di coordinate nello spazio.

Quando i moti geometrici si considerano nello spazio, le *coordinate di un punto* apparterranno ad un *sistema semplice* se, vincolate da un'equazione di 1° grado, tale equazione *rappresenta un piano* sopra cui si muove il punto al variare delle sue coordinate. E le *coordinate di un piano* apparterranno ad un *sistema semplice* se, vincolate da un'equazione di 1° grado, tale equazione *rappresenta un punto fisso* intorno a cui gira il piano.

Da queste definizioni si deducono immediatamente le proposizioni che seguono, e che si dimostrano nel modo stesso che pe' sistemi semplici considerati nel piano.

1.^a Se in un'equazione di 1° grado

$$(a) \quad ax + by + cz + dt = 0,$$

le quantità x, y, z, t rappresentano le *coordinate di un punto*, i loro *coefficienti* a, b, c, d , considerati come *variabili*, rappresenteranno le *coordinate di un piano*; e viceversa.

2.^a Nello spazio, *ad ogni sistema semplice di coordinate di un punto* va sempre unito o CONJUGATO un sistema semplice di coordinate di un piano, e viceversa; cosicchè dato il significato geometrico dell' uno de' due sistemi conjugati, è da cercarsi il significato geometrico dell' altro.

3.^a Se l' equazione

$$(b) \quad f(x, y, z, t) = 0$$

omogenea rispetto alle coordinate x, y, z, t , rappresenta una superficie curva, luogo de' punti $xyzt$, l' equazione

$$(b)' \quad \frac{df}{dx} x' + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dz} z' + \frac{df}{dt} t' = 0,$$

in cui si suppone dato un punto qualsivoglia $xyzt$ della superficie curva, e corrente il punto $x'y'z't'$, rappresenterà un piano che tocca la superficie nel dato punto $xyzt$, e questo piano sarà determinato dai coefficienti $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}, \frac{df}{dt}$.

4.^a Il cono che da un punto dato o polo $x'y'z't'$ stendesi ad abbracciare la superficie curva (b) , toccherà questa superficie lunghezzo la linea in cui la superficie seguente

$$x' \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + z' \frac{df}{dz} + t' \frac{df}{dt} = 0,$$

POLARE del punto dato $x'y'z't'$, sega la superficie proposta.

5.^a Se l' equazione (b) rappresenta invece una superficie curva involuppo de' piani $xyzt$, l' equazione $(b)'$, in cui si suppone dato un piano tangente qualsivoglia $xyzt$, rappresenterà co' suoi coefficienti $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ ec. il punto di con-

tatto intorno a cui gira il piano mobile $x'y'z't'$.

In ogni superficie sviluppabile il luogo del contatto con un piano essendo, non un punto, ma una linea retta, i

coefficienti $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ ec. dovrebbero riuscire affatto *indeterminati*. Un' equazione in coordinate di piani non può adunque rappresentare una superficie sviluppabile, e nemmeno linee rette isolate, ma bensì, in alcuni casi speciali, punti isolati, e linee curve.

6.^a Se dall' equazione (b) o dall' equivalente

$$\frac{df}{dx} x + \frac{df}{dy} y + \frac{df}{dz} z + \frac{df}{dt} t = 0,$$

considerata come rappresentante una superficie *inviluppo de' piani* $xyzt$, si voglia ricavare l' equazione che rappresenti la stessa superficie come *luogo di punti* de' quali le coordinate ξ , η , ζ , τ siano le *conjugate* di x , y , z , t , basterà porre dapprima l' equazioni

$$\frac{df}{dx} = \xi, \quad \frac{df}{dy} = \eta, \quad \frac{df}{dz} = \zeta, \quad \frac{df}{dt} = \tau,$$

e poscia per mezzo di esse esprimere i valori di x , y , z , t in funzione di ξ , η , ζ , τ , ed in ultimo sostituirli nell' equazione

$$\xi x + \eta y + z \zeta + \tau t = 0.$$

Si otterrà in tal guisa una nuova equazione

$$\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$$

che rappresenterà la superficie curva (b) come luogo de' punti $\xi\eta\zeta\tau$.

Il problema inverso si risolve precisamente nel medesimo, osservando che nell' equazione

$$\frac{d\phi}{d\xi} \xi + \frac{d\phi}{d\eta} \eta + \frac{d\phi}{d\zeta} \zeta + \frac{d\phi}{d\tau} \tau = 0$$

che rappresenta la superficie come luogo di punti, i coef-

ficienti $\frac{d\phi}{d\xi}$, $\frac{d\phi}{d\eta}$ ec. sono proporzionali alle coordinate x, y, z, t del piano che tocca la superficie nel punto $\xi\eta\zeta\tau$.

Affinchè però questa doppia trasformazione riesca possibile, si richiede evidentemente che l'*inviluppo di piani* non si risolva in un complesso di punti isolati o di linee curve, e che il *luogo di punti* non sia una superficie sviluppabile.

ARTICOLO II.

PRINCIPII DA CUI SI DERIVANO LE LEGGI DE' SISTEMI SEMPLICI.

§ 1.^o Relazione tra i momenti di più rette situate in un piano ed il momento della loro risultante. Momento di una coppia di rette. Rette variabili prese sopra i lati di un triangolo e loro risultante.

Allorchè sopra un piano sono date più rette a, b, c, d ec. in grandezza e in direzione, ed un punto M preso ad arbitrio nel piano, il prodotto di una qualunque di queste rette per la sua distanza dal punto M sarà chiamato il *MOMENTO della retta rispetto al punto M* . Questo prodotto si riterrà come *positivo* o come *negativo* secondochè il *corso della retta*, riguardato da un Osservatore ritto sul piano nel punto M , si fa o no dalla sua destra alla sua sinistra; ovvero, secondochè un raggio visuale che parte da M e segue il corso della retta, va girando dalla destra alla sinistra o dalla sinistra alla destra dell'osservatore in M . Chiamo (per abbreviare) *corso di una linea* il moto del punto che la genera. Così il corso di una retta determina il verso della direzione della retta.

TEOR. Date due rette a, b divergenti da un punto O e la loro risultante r , se da un punto M preso ad arbitrio nel piano delle rette, si abbassano sulle medesime (a, b, r) le perpendicolari MA, MB, MR , avremo

$$(1) \quad r \cdot MR = a \cdot MA + b \cdot MB,$$

vale a dire: *Il momento della retta risultante è uguale alla somma de' momenti delle rette componenti.*

DIM. Si conduca per O un asse Ox perpendicolare ad OM , e sopra quest' asse si proiettino le rette r , a , b . Avremo per la definizione della retta risultante:

$$r \operatorname{sen}(OM, r) = a \operatorname{sen}(OM, a) + b \operatorname{sen}(OM, b).$$

Questa formola moltiplicata per OM si muta subito nella (1), essendochè MR , MA , MB , siccome cateti de' triangoli rettangoli OMR , OMA , OMB , sono eguali ciascuno al prodotto dell'ipotenusa OM pel seno dell'angolo opposto.

Supponiamo ora che le rette MA , MB , senza cessare di essere perpendicolari alle componenti a , b , girino intorno al punto M seco traendo le stesse componenti, e che alla fine si dispongano in linea retta. Dopo questa rotazione le componenti a , b , e con esse la risultante r , saranno divenute parallele senza che la (1) abbia mai cessato di esistere. Ne conseguita che i quattro punti M , A , B , R essendosi disposti in linea retta, se il punto arbitrario M si fa coincidere successivamente coi punti A , B , la (1) diverrà in corrispondenza

$$r \cdot AR = b \cdot AB, \quad r \cdot BR = a \cdot BA,$$

donde si raccoglie la proporzione

$$\frac{r}{AB} = \frac{a}{RB} = \frac{b}{AR};$$

e poichè $AB = AR + RB$, così sarà $r = a + b$. Dunque:

Due rette parallele a , b si compongono in una terza retta r , parallela alle componenti, uguale alla loro somma, e ciascuna delle tre rette, risultante e componenti, è proporzionale alla distanza che corre tra le altre due.

Nel caso di $b = -a$, e però di $r = 0$, cioè nel caso di una coppia di rette parallele, uguali e di segno contrario (a , $-a$), si avrà

$$a \cdot AM + b \cdot BM = a(AM + MB) = a \cdot AB,$$

vale a dire: *Date due rette parallele, uguali e di segno contrario, costituenti una coppia, la somma de' loro momenti, rispetto ad un punto M preso ad arbitrio nel piano della coppia, è costantemente uguale al prodotto del valor comune ($= a$) delle due rette per la loro distanza AB . Questo prodotto costante è il momento della coppia delle rette assegnate.*

Date in un piano più rette a, b, c, d etc., componendo la risultante delle prime due colla terza, e poi la risultante delle prime tre colla quarta, e così di seguito, si arriverà necessariamente o ad una retta unica risultante, ovvero ad una coppia. *Qualunque sia il numero delle rette date, il momento della retta risultante, o della coppia risultante, sarà uguale alla somma de' momenti delle componenti.*

Sia dato un triangolo qualsivoglia ABC , e supponiamo che il corso del suo perimetro sia tale che riesca *positivo* il momento di ciascun lato rispetto al vertice opposto. La proiezione di questo perimetro sopra un asse qualsivoglia essendo uguale a zero, *la risultante di due qualunque de' tre lati BC, CA, AB , sarà una linea parallela, uguale e di segno contrario al terzo lato.* Ne segue che i momenti de' tre lati debbono offrire una somma costante per ogni punto M preso nel piano del triangolo. Questa somma dunque sarà eguale al momento di un lato qualsivoglia rispetto al vertice opposto, e però sarà eguale a due volte l'area del triangolo. Così se α, β, γ sono le perpendicolari abbassate sopra i lati BC, CA, AB da un punto arbitrario M , sarà

$$BC \cdot \alpha + CA \cdot \beta + AB \cdot \gamma = 2\Delta,$$

ove Δ dinota l'area del triangolo ABC . Quest'equazione, avuto il debito riguardo ai segni, esprime che: « *La somma de' triangoli parziali BMC, CMA, AMB , è uguale al triangolo totale ABC :*

$$ABC = AMB + BMC + CMA.$$

Denotiamo ora per x, y, z tre rette variabili situate ri-

spettivamente sopra i lati BC , CA , AB e di più nel senso indicato dai loro segni; e sia r la loro risultante, retta che esiste sempre in *grandezza* e in *posizione*, tranne il caso che le componenti x , y , z riescano proporzionali ai lati BC , CA , AB . Chiamata p la perpendicolare abbassata da M ($\alpha\beta\gamma$) sulla linea della risultante, il principio dei momenti e quello della risultante offrirà

$$\delta \cdot p = x \cdot \alpha + y \cdot \beta + z \cdot \gamma,$$

$$r^2 = \begin{array}{l|l} x^2 & yz \cos A \\ y^2 & zx \cos B \\ z^2 & xy \cos C, \end{array}$$

ove per A , B , C s' intendono gli angoli interni del triangolo ABC .

Viceversa: Data di grandezza e di posizione una retta r , se si voglia decomporre in tre componenti x , y , z applicate ai lati BC , CA , AB , si può tenere il seguente processo. Si noti il punto E dove la retta r , prolungata se occorre, incontra uno de' lati, per es. BC ; il punto E ed il vertice A opposto al lato BC determinano la linea AE . Nel punto E la retta r si decomponga in due x ed e applicate sulle linee BC , AE ; e poscia nel punto A la retta e si decomponga in due altre y , z applicate sui lati CA , AB . In questo modo la retta r rimarrà decomposta nelle tre x, y, z applicate ai lati BC , CA , AB ; ed è palese che, qualunque sia l'ordine con cui si opera questa decomposizione di r , le componenti x , y , z risulteranno sempre le medesime.

Si osservi ancora che al variare delle componenti x , y , z , la risultante r si muoverà nel piano del triangolo ABC , e si potrà farla andare in quella posizione che più aggrada. La formola

$$r = \text{ris}(x, y, z)$$

rappresenta quindi una retta pienamente determinata nella *grandezza* e nella *posizione*.

§ 2.° Relazione tra i momenti di più aree nello spazio ed il momento dell'area risultante. Momento di una coppia di aree. Aree variabili prese sopra i piani delle facce di un tetraedro, ed area risultante.

Date più aree a, b, c, d etc. sulle facce determinate de' loro piani, ed un punto M preso ad arbitrio nello spazio, il prodotto di una qualunque di queste aree per la sua distanza dal punto M sarà chiamato il MOMENTO DELL'AREA rispetto al punto M . Questo prodotto si riterrà come POSITIVO o come NEGATIVO secondochè il punto M e la faccia del piano che contiene l'area si trovano situati dalla stessa parte o dalla opposta rispetto ad esso piano.

TEOR. Date due aree a, b in piani divergenti da una retta e l'area risultante r , se da un punto M preso ad arbitrio nello spazio si abbassano sui piani di quest' aree a, b, r le perpendicolari MA, MB, MR , avremo

$$(1) \quad r \cdot MR = a \cdot MA + b \cdot MB,$$

vale dire: *Il momento dell' area risultante è uguale alla somma de' momenti delle aree componenti.*

DIM. Il piano AMB , perpendicolare ai piani delle due aree a, b , segli in O la loro linea d' intersezione. Condotta per O un piano perpendicolare alla retta OM , si proiettino sopra questo piano le aree a, b, r . Avremo per la definizione dell' area risultante

$$r \sin (OM, r) = a \sin (OM, a) + b \sin (OM, b).$$

Questa formola moltiplicata per OM si muta subito nella (1).

Supponiamo ora che le rette MA, MB , senza cessare di esser perpendicolari ai piani delle aree componenti a, b , girino intorno al punto M traendo seco loro i detti piani, ed alla fine si dispongano in linea retta. Dopo questa rotazione i piani delle aree componenti a, b e dell' area risultante r saranno divenuti paralleli senza che la (1) abbia mai cessato di esistere. Ne conseguita che i quattro

punti M, A, B, R essendosi disposti in linea retta, se il punto arbitrario M si fa coincidere successivamente coi punti A, B , la (1) diverrà in corrispondenza

$$r \cdot AR = b \cdot AB, \quad r \cdot BR = a \cdot BA,$$

donde si raccoglie la proporzione

$$\bullet \quad \frac{r}{AB} = \frac{a}{RB} = \frac{b}{AR};$$

e poichè $AB = AR + RB$, così sarà $r = a + b$. Dunque:

Due aree parallele a, b si compongono in una terza area r , parallela alle componenti, uguale alla loro somma, e ciascuna delle tre aree, risultante e componenti, è proporzionale alla distanza che corre tra le altre due.

Nel caso di $b = -a$ e però di $r = 0$, cioè nel caso di una coppia di aree parallele, uguali e di segno contrario ($a, -a$), si avrà

$$a \cdot AM + b \cdot BM = a (AM + MB) = a \cdot AB,$$

vale a dire: *Date due aree parallele, uguali e di segno contrario, costituenti una coppia, la somma de' loro momenti rispetto ad un punto M preso ad arbitrio nello spazio è costantemente uguale al prodotto del valore comune ($=a$) delle due aree per la distanza AB de' loro piani.* Questo prodotto costante è il MOMENTO DELLA COPPIA delle aree assegnate.

Date più aree a, b, c, d ec., componendo la risultante delle prime due colla terza, e poi la risultante delle prime tre colla quarta, e così di seguito, si arriverà necessariamente o ad un'area unica risultante, ovvero ad una coppia. Qualunque sia il numero delle aree date, il momento dell'area risultante, ovvero della coppia risultante, sarà uguale alla somma de' momenti delle aree componenti.

Sia dato un tetraedro qualsivoglia $ABCD$, e si riguardino come *positive* le sue quattro *facce interne* a, b, c, d . La somma delle proiezioni di queste facce sopra un piano qualunque essendo uguale a zero, *la risultante di tre sarà uguale, parallela e di segno contrario alla quarta faccia*. Ne segue che i momenti delle quattro facce a, b, c, d debbono offrire una somma costante per ogni punto M preso ad arbitrio nello spazio. Questa somma dunque sarà uguale al momento di una faccia qualsivoglia rispetto al vertice opposto, e però sarà uguale a tre volte il volume V del tetraedro. Così se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono le perpendicolari abbassate sopra le facce a, b, c, d da un punto arbitrario M , sarà

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta = 3V.$$

Quest' equazione, avuto il debito riguardo ai segni, esprime che: *La somma delle piramidi parziali $BCDM, CDAM, DABM, ABCM$ è eguale alla piramide totale $ABCD$:*

$$ABCD = ABCM + BCDM + CDAM + DABM.$$

Supponiamo adesso che x, y, z, t rappresentino quattro aree variabili situate rispettivamente (avendo il debito riguardo ai segni) sopra i piani delle facce a, b, c, d , e sia r l'area risultante, area che esiste sempre tranne il caso in cui le quattro aree componenti riescano proporzionali alle facce del tetraedro. Chiamata p la perpendicolare abbassata dal punto M ($\alpha\beta\gamma\delta$) sul piano di r , avremo

$$rp = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t,$$

$$r^3 = \begin{vmatrix} x^2 & yz \cos(bc) \\ y^2 & zx \cos(ca) \\ z^2 & xy \cos(ab) \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} x\delta \cos(ad) \\ y\delta \cos(bd) \\ z\delta \cos(cd) \end{vmatrix}.$$

dove per (ab) , (bc) , (ca) ec. s' intendono gli angoli diedri del tetraedro, supplementi degli angoli interni.

Viceversa: Data di grandezza e di posizione l'area r , per averne le aree componenti applicate ai piani delle quattro facce a, b, c, d del tetraedro si può tenere il seguente processo. Si noti la linea E dove il piano dell'area r sega una delle quattro facce del tetraedro, per es. la faccia a . La linea E ed il vertice A opposto alla faccia a determinano 'il piano EA . In E l'area r si decomponga in due x ed e situate ne' piani a ed EA , e poi in A l'area e si decomponga in tre y, z, t applicate alle facce b, c, d del tetraedro. In questo modo l'area r rimarrà decomposta nelle quattro x, y, z, t applicate alle facce a, b, c, d ; ed è palese che, qualunque sia l'ordine con cui si opera questa decomposizione dell'area r , *le aree componenti* x, y, z, t *risulteranno sempre le medesime.*

Giova inoltre notare che al variare delle aree componenti x, y, z, t , il piano dell'area r si sposterà nello spazio, e si potrà farlo andare in quella posizione che più aggrada. La formola

$$r = \text{ris.}(x, y, z, t)$$

rappresenta quindi un'area pienamente determinata nella grandezza e nella *posizione del suo piano.*

§. 3.^o Definizione del punto risultante di più punti affetti da coefficienti numerici. Proprietà del punto risultante rispetto ai punti componenti.

Dati di posizione più punti M, M', M'' ec. affetti rispettivamente da altrettanti coefficienti numerici m, m', m'' ec.. chiamo PUNTO RISULTANTE quel punto G le cui distanze dai punti dati, moltiplicate pe' rispettivi coefficienti m, m', m'' ec. ec., hanno una risultante nulla, vale a dire, quel punto G che soddisfa alla relazione

$$\text{ris.}(m \cdot GM, m' \cdot GM', m'' \cdot GM'' \text{ ec.}) = 0,$$

e per conseguenza alla

$$^p(m \cdot GM + m' \cdot GM' + m'' \cdot GM'' + \text{ec.})_x = 0$$

dove la lettera D indica il *piano dirigente* parallelamente a cui si proiettano sull'asse x le rette componenti $m \cdot GM$, $m' \cdot GM'$, ec.

Si diranno *PESI de' punti dati* i loro *coefficienti*. Il *PESO g del punto risultante* dee stimarsi uguale (come ora si vedrà) alla somma algebrica de' pesi de' punti componenti M , M' , M'' ec., cioè

$$g = m + m' + m'' + \text{ec.}$$

Il punto risultante è chiamato eziandio *centro di gravità*, o *baricentro*, ed anche semplicemente *centro del sistema de' punti*.

Dati di posizione più punti M , M' , M'' ec. coi loro pesi m , m' , m'' ec., uno de' metodi per determinarne il punto risultante G è il seguente. Si uniscano i punti dati con un punto arbitrario O mediante le rette OM , OM' , OM'' ec., e sopra di queste presi i segmenti rappresentati in *lunghezza* dai prodotti $m \cdot OM$, $m' \cdot OM'$, $m'' \cdot OM''$ ec., si cerchi di questi segmenti la risultante OR . Se sopra OR si determina il punto G in modo che risulti

$$OG = \frac{OR}{g},$$

il punto G così ottenuto sarà il punto risultante de' punti dati M , M' , M'' ec.

Infatti le rette $m \cdot OM$, $m' \cdot OM'$ ec., se si compongono colla risultante OR volta in verso contrario, ossia colla RO ($= g \cdot GO$), offrendo una risultante nulla danno luogo all'equazione

$$^p(g \cdot GO + m \cdot OM + m' \cdot OM' + \text{ec.})_x = 0.$$

Ma essendo d' altra parte

$$^p(m \cdot OM)_x = m \cdot ^p(OG + GM)_x,$$

$$^p(m' \cdot OM')_x = m' \cdot ^p(OG + GM')_x, \text{ ec.}$$

la formola precedente equivale a

$$^p(g \cdot GO + (m + m' + \text{ec.}) \cdot OG + m \cdot GM + m' \cdot GM' + \text{ec.}) = 0,$$

e questa alla

$$^p(m \cdot GM + m' \cdot GM' + \text{ec.})_x = 0$$

a causa di $g \cdot GO + g \cdot OG = g(GO + OG) = 0$.

Da questa dimostrazione apparisce che: « Dato un sistema di punti ed il punto risultante G , la retta che da un *polo arbitrario* O va al centro G , moltiplicata nel peso g di tutto il sistema, rappresenta la risultante delle rette che da O vanno ai punti dati M, M' ec., moltiplicate anch' esse ne' pesi m, m' ec. de' punti corrispondenti. Quindi è che, allo spostarsi del punto O , la risultante OR si moverà dirigendosi sempre al centro G . Così, se il punto O cammina sopra una sfera di cui G sia il centro, le rette $m \cdot OM, m' \cdot OM'$ ec. benchè mutino direzione e grandezza hanno una risultante OR la quale, girando intorno al centro G , conserva sempre lo stesso valore $= g \cdot OG$.

Giova una volta per sempre ritenere per convenzione che: *Nella proiezione de' punti, i pesi loro si conservino inalterati*. Importa eziandio por mente alle proposizioni che seguono:

1.^a Come la retta risultante di più rette date è unica, così è *unico il punto risultante di più punti dati*, e per conseguenza *si può tenere qual ordine si vuole nel determinarlo*.

2.^a L' esistenza del punto risultante suppone che il peso g del sistema de' punti sia diverso da zero. Se risulta-

se $g = 0$, allora il sistema si potrebbe ad arbitrio scomporre in due sistemi parziali, i cui centri avrebbero pesi uguali ma di segno contrario.

3.^a *Se un punto è il centro di gravità di più altri, proiettato sopra un piano, anche sul piano continua ad essere il centro di gravità degli altri punti omologamente proiettati.* Imperocchè come un poligono proiettato sopra un piano è un altro poligono, così se una retta è la risultante di più altre, proiettata sopra un piano, anche sul piano è la risultante delle altre rette omologamente proiettate. Laonde se una risultante è nulla, sarà nulla in ogni proiezione che possa farsene.

4.^a *Se i punti di un sistema si proiettano sopra piani diversi parallelamente ad uno stesso asse, in ogni piano si avrà un centro de' punti proiettati: Tutti questi centri di gravità saranno in linea retta, e precisamente sopra la retta che proietta sui piani dati il centro del sistema.* Così se un prisma si taglia con piani diversi, i centri de' vertici di ciascuna sezione (rimanendo invariati i loro pesi) saranno tutti in linea retta.

§ 4.^o *Relazione tra i momenti di più punti ed il momento del punto risultante. Pesi variabili ne' vertici di un triangolo e di un tetraedro, e conseguenze rispetto al punto risultante.*

Dato un sistema di punti e le loro distanze da un piano (yz) *stimate parallelamente ad un asse dirigente Ox , se il peso di ciascun punto si moltiplica per la distanza che corre tra esso punto ed il piano, il prodotto si dirà MOMENTO DEL PUNTO*, e si diranno *omologhi* i momenti presi rispetto allo stesso piano ed allo stesso asse dirigente: il quale non si nomina quando è perpendicolare al piano. Offrendo il piano due facce che si distinguono in *faccia positiva* ed in *faccia negativa*, la distanza di un punto al piano dee contarsi come *positiva* o come *negativa* secondochè il punto trovasi dal lato della faccia positiva del piano o dal lato della negativa.

In un sistema di punti, *il momento del punto risultan-*

te G è uguale alla somma de' momenti omologhi de' punti componenti M, M' , ec. vale a dire, se denotiamo per x, x, x' etc. le distanze omologhe de' punti G, M, M' ec. al piano (yz) , si avrà

$$gx = mx + m'x' + \text{ec.}$$

dove i prodotti $gx, mx, m'x'$ etc. si debbono riguardare come *positivi* o come *negativi* secondochè i due fattori hanno lo stesso o contrario segno (± 1).

DIM. Osserviamo infatti che, coordinati intorno al punto O i tre assi Ox, Oy, Oz , le distanze x, x, x' etc. de' punti G, M, M' ec. dal piano (yz) stimate parallelamente ad Ox , sono eguali (sopra l'asse Ox) alle proiezioni delle rette OG, OM, OM' etc. essendo *dirigente* il piano (yz) . Ma la retta $g.OG$ è (per ciò che si è veduto di sopra) la risultante delle rette $m.OM, m'.OM'$ ec. Dunque la proiezione della prima retta sull'asse Ox , ossia gx , è (per la definizione della risultante) uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle altre rette, $mx, m'x'$ ec.: ciò che appunto viene espresso dall'equazione $gx = mx + m'x' + \text{ec.}$

Segnate per $xyz, xyz, x'y'z'$ ec. le coordinate de' punti G, M, M' ec. si avrà dunque in generale

$$gx = mx + m'x' + \text{ec.},$$

$$gy = my + m'y' + \text{ec.},$$

$$gz = mz + m'z' + \text{ec.};$$

le quali formole fanno conoscere ove risieda il centro di un sistema di punti, date che siano le coordinate di questi punti.

Quando i punti dati sono tutti in un piano, i loro momenti si prendono rispetto a due assi Ox, Oy coordinati in esso piano; cosicchè, in questo caso, *il momento di un punto rispetto ad uno degli assi è il prodotto del peso del punto per la sua distanza da quest'asse stimata parallelamente all'altro asse.*

Quando i punti dati M, M' etc. sono tutti in linea retta, i loro momenti si sogliono prendere rispetto ad un punto o *polo arbitrario* O di questa retta, cosicchè, in questo caso, il momento di uno di questi punti è il prodotto del peso del punto per la sua distanza dal polo O . E si avrà

$$g \cdot OG = m \cdot OM + m' \cdot OM' + \text{etc.}$$

Consideriamo il caso in cui i punti sono due soli M ed M' . Se il polo O si fa coincidere successivamente con M e con M' , avremo

$$g \cdot MG = m' \cdot MM', \quad g \cdot M'G = m \cdot M'M,$$

dalle quali si ricava la proporzione

$$\frac{g}{MM'} = \frac{m}{GM'} = \frac{m'}{MG},$$

vale a dire: Se i punti dati sono due M, M' , il loro centro G divide la retta MM' che li unisce in parti reciprocamente proporzionali ai loro pesi; ond'è che *il peso di ciascuno de' tre punti, componenti e risultante, è proporzionale alla distanza degli altri due.*

Dato un sistema S di punti, se si scomponga ad arbitrio in un qualsivoglia numero di sistemi parziali de' quali vengano determinati i centri, il punto risultante di questi centri sarà il centro G del sistema totale. Suppongasì, per esempio, che il sistema S di centro G e di peso g si scomponga in due, di centri M, N e di pesi m, n . Sarà

$$g = m + n, \quad MN = MG + GN;$$

ed

$$MG = \frac{n}{m+n} MN, \quad GN = \frac{m}{m+n} MN.$$

Se i punti del sistema siano *semplici*, vale a dire se i

loro pesi siano *eguali all'unità*, le quantità m, n saranno numeri interi. Così il centro del sistema di tre punti semplici A, B, C , (ponendo $m = 1, n = 2$) trovasi ai $\frac{2}{3}$ di ogni retta che da uno di essi va al centro degli altri due. Ed il centro di un sistema di quattro punti semplici A, B, C, D (ponendo $m = 1, n = 3$) trovasi ai $\frac{3}{4}$ di ogni retta che da uno di essi va al centro degli altri tre, ed è pure (ponendo $m = 2, n = 2$) nel mezzo di ogni retta che dal centro di due di essi va al centro degli altri due.

Tre punti affetti dai pesi variabili p, q, r siano i vertici A, B, C di un triangolo qualsivoglia, ed M sia il punto risultante, il cui peso m sarà

$$m = p + q + r.$$

Data nel piano del triangolo ABC una retta arbitraria (μ), le si abbassino dai quattro punti M, A, B, C le perpendicolari μ, ξ, η, ζ . Il momento del punto risultante dovendo essere uguale alla somma de' momenti omologhi dei punti componenti, avremo

$$(1) \quad m\mu = p\xi + q\eta + r\zeta.$$

Denotiamo adesso per a_1, b_1, c_1 le perpendicolari che dai vertici A, B, C scendono sui lati opposti $BC = a, CA = b, AB = c$; talchè, chiamata Δ l'area del triangolo ABC , si abbia

$$2\Delta = aa_1 = bb_1 = cc_1,$$

e poscia denotiamo per x, y, z le perpendicolari che dal punto M vanno ai lati BC, CA, AB ; ed in fine per $(A), (B), (C)$ le aree de' triangoli parziali BMC, CMA, AMB , includendo tra parentesi, per ciascun triangolo, quella delle tre lettere A, B, C che non è vertice del triangolo. Sarà

$$(A) = \frac{1}{2}ax, \quad (B) = \frac{1}{2}by, \quad (C) = \frac{1}{2}cz.$$

Ciò posto, se la retta arbitraria (μ) si fa coincidere con

uno de' lati del triangolo ABC , per esempio, con BC , risulterà

$$\mu = x, \quad \xi = a_1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0;$$

e l'equazione (1) diverrà $m \cdot x = p \cdot a_1$, la quale moltiplicata per $\frac{1}{2}a$ si muta in $m(A) = p\Delta$, ovvero in $\frac{m}{\Delta} = \frac{p}{(A)}$; donde, per ragion di simmetria

$$\frac{m}{\Delta} = \frac{p}{(A)} = \frac{q}{(B)} = \frac{r}{(C)},$$

vale a dire: *Qualunque sia la grandezza de' pesi ne' vertici di un triangolo, e la posizione del punto risultante M , il peso di ciascuno de' quattro punti, componenti e risultante, sarà proporzionale all' area del triangolo determinato dai tre punti rimanenti.*

Per questo teorema, data nel piano del triangolo ABC la posizione qualsivoglia di un punto M di peso costante m ed eguale a due volte l' area del triangolo ($m = 2\Delta$), si avranno subito i valori de' pesi componenti così espressi

$$p = 2(A), \quad q = 2(B), \quad r = 2(C),$$

cioè

$$p = ax, \quad q = by, \quad r = cz;$$

e la (1) vestirà la forma

$$(1)' \quad 2\Delta\mu = ax\xi + by\eta + cz\zeta.$$

Quattro punti affetti da pesi variabili p, q, r, s siano i vertici A, B, C, D di un tetraedro qualsivoglia, ed M sia il punto risultante, il cui peso sarà

$$m = p + q + r + s.$$

Dato nello spazio un piano arbitrario (μ) , gli si abbassi-

no dai cinque punti M, A, B, C, D le perpendicolari $\mu, \xi, \eta, \zeta, \tau$. Il momento del punto risultante M dovendo essere uguale alla somma de' momenti omologhi de' punti componenti, avremo

$$(1) \quad m\mu = p\xi + q\eta + r\zeta + s\tau.$$

Denotiamo adesso per a, b, c, d le perpendicolari che dai vertici A, B, C, D scendono sulle facce opposte a, b, c, d del tetraedro; talchè, detto V il volume di questo, si abbia

$$3V = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1;$$

e poscia denotiamo per x, y, z, t le perpendicolari che dal punto M vanno alle facce a, b, c, d ; ed in fine per $(A), (B), (C), (D)$ i volumi delle piramidi parziali $BCDM, CDAM, DABM, ABCM$. Sarà

$$3(A) = ax, \quad 3(B) = by, \quad 3(C) = cz, \quad 3(D) = dt.$$

Ciò posto, se il piano arbitrario (μ) si fa coincidere con uno de' piani delle quattro facce a, b, c, d , per es. con a , risulterà

$$\mu = x, \quad \xi = a, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \tau = 0;$$

e la (1) diverrà $m \cdot x = p \cdot a$, la quale, moltiplicata per $\frac{1}{3}a$, si muta in $m(A) = pV$, ovvero in $\frac{m}{V} = \frac{p}{(A)}$; donde, per ragion di simmetria,

$$\frac{m}{V} = \frac{p}{(A)} = \frac{q}{(B)} = \frac{r}{(C)} = \frac{s}{(D)},$$

vale a dire: *Qualunque sia la grandezza de' pesi nei vertici di un tetraedro, e la posizione del punto risultante M .*

il peso di ciascuno de' cinque punti, componenti e risultante, sarà proporzionale al volume del tetraedro determinato dai quattro punti rimanenti.

Per questo teorema, data nello spazio la posizione qualsivoglia di un punto M di peso costante m ed uguale a tre volte il volume V del tetraedro ($m = 3V$), si avranno subito i valori de' pesi componenti così espressi

$$p = 3(A), \quad q = 3(B), \quad r = 3(C), \quad s = 3(D),$$

cioè

$$p = ax, \quad q = by, \quad r = cz, \quad s = dt,$$

e la (1) vestirà la forma

$$(1)' \quad 3V\mu = ax\xi + by\eta + cz\zeta + d\tau.$$

ARTICOLO III.

SISTEMI SEMPLICI DELLE COORDINATE PIÙ IN USO.

§ 1.° Sistema di coordinate componenti e di coordinate proiezioni con origine comune.

Le prime e le più in uso tra le coordinate de' sistemi semplici sono quelle dovute a Cartesio, cioè quelle che nel piano si misurano sopra due assi Ox , Oy , e nello spazio sopra tre Ox , Oy , Oz , aventi una origine comune O , e coordinati sotto angoli arbitrarii. Per conoscere la natura e l'ufficio di queste coordinate, basta studiarle nel caso più generale, cioè nello spazio.

Le coordinate x , y , z di un punto M riferito a tre assi Ox , Oy , Oz , sono sopra questi assi le componenti della retta OM che va dalla origine O al punto M . Giova talvolta prendere per coordinate le proiezioni ortogonali della retta OM sugli stessi assi, ed in questa supposizione, fatto $OM = r$, si ha

$$x = r \cos(xr), \quad y = r \cos(yr), \quad z = r \cos(zr).$$

Queste coordinate, per distinguerle dalle precedenti, si diranno *coordinate proiezioni*.

Immaginiamo dato nello spazio un piano qualsivoglia P , e dall'origine O abbassiamo sovr'esso la perpendicolare $OP, = p$. Poscia sulla perpendicolare OP , prolungata se occorre, prendiamo un segmento $OG = g$ di lunghezza arbitraria, e di questa retta g determiniamo sugli assi Ox, Oy, Oz le proiezioni A, B, C . Sarà $A = g \cos(xp)$, $B = g \cos(y p)$, $C = g \cos(z p)$.

Il raggio vettore OM , che segue il punto M corrente sul piano P , proiettato ortogonalmente sulla perpendicolare OP , darà sempre la stessa proiezione $= p$, ed il principio che « Una retta moltiplicata per la proiezione che le vien sopra da un'altra retta, è uguale alla somma delle componenti dell'una, moltiplicate rispettivamente per le proiezioni che sopra loro vengono dall'altra, » offrirà immediatamente l'equazione

$$g \cdot p = Ax + By + Cz.$$

Ne segue che: *Un'equazione di primo grado tra le coordinate componenti x, y, z del punto M , quale*

$$Ax + By + Cz = D,$$

rappresenta un piano distante dall'origine O per l'intervallo

$$OP = p = \frac{D}{g},$$

e perpendicolare alla direzione della retta g che cade sugli assi Ox, Oy, Oz colle proiezioni date A, B, C .

Per esprimere il valore della retta g in funzione di A, B, C , ed in generale per ridurre al principio della retta risultante la TEORIA DELLE PROIEZIONI, conviene aver presente la sfera sopra cui si misurano gli angoli triedri formati dagli assi positivi Ox, Oy, Oz , e dai loro polari Ox_1, Oy_1, Oz_1 , cioè da tre nuovi assi eretti a perpendicolo sui piani coordinati yz, zx, xy .

Intorno ad O come centro si concepisca dunque una sfera di raggio $= 1$, e sulla sfera per x, y, z e per x_1, y_1, z_1 s'intendano i punti pe' quali passano

rispettivamente i due sistemi di assi positivi (Ox, Oy, Oz) , (Ox_1, Oy_1, Oz_1) .
La considerazione de' due triangoli sferici xyz , $x_1 y_1 z_1$, polari l'uno dell'altro, posto

$$H = \text{sen}(yz) \text{sen}(zx) \text{sen} z \\ = \sqrt{1 - \cos^2(yz) - \cos^2(zx) - \cos^2(xy) + 2\cos(yz)\cos(zx)\cos(xy)},$$

fornisce

$$\cos(xz_1) = \text{sen}(yz, x) = \text{sen}(zx) \text{sen} z = \frac{H}{\text{sen}(yz)}$$

ed in generale

$$\cos(xz_1) = \frac{H}{\text{sen}(yz)}, \quad \cos(yy_1) = \frac{H}{\text{sen}(zx)}, \quad \cos(zz_1) = \frac{H}{\text{sen}(xy)}.$$

Ciò premesso, se, dinotate per a, b, c le componenti della retta g sugli assi del sistema (Ox_1, Oy_1, Oz_1) , talchè si abbia

$$g = \text{ris.}(a, b, c),$$

si faccia la proiezione della retta g e delle sue componenti a, b, c sopra ciascuno degli assi dell'altro sistema (Ox, Oy, Oz) (applicando il principio che la proiezione della risultante g è uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle sue componenti a, b, c); si otterranno subito le relazioni notabilissime

$$a = A \frac{\text{sen}(yz)}{H}, \quad b = B \frac{\text{sen}(zx)}{H}, \quad c = C \frac{\text{sen}(xy)}{H},$$

in grazia delle quali le proiezioni ortogonali di una retta sopra tre assi obliqui si mutano in componenti sopra gli assi polari de' primi, e viceversa.

Ora il principio che dà la risultante in funzione delle componenti, offre

$$g = \begin{vmatrix} a^2 & bc \cos x \\ b^2 & ca \cos y \\ c^2 & ab \cos z \end{vmatrix} - 2$$

Dunque, per le relazioni trovate,

$$\begin{vmatrix} A^2 \text{sen}^2(yz) & BC \text{sen}(zx) \text{sen}(xy) \cos x \\ B^2 \text{sen}^2(zx) & CA \text{sen}(xy) \text{sen}(yz) \cos y \\ C^2 \text{sen}^2(xy) & AB \text{sen}(yz) \text{sen}(zx) \cos z \end{vmatrix} - 2$$

Supponiamo adesso che il piano

$$Ax + By + Cz = D = g \cdot p,$$

segli i tre assi Ox , Oy , Oz ne' punti A , B , C . I coseni degli angoli che la perpendicolare OP fa co' tre assi, ed i cui valori sono $\frac{A}{g}$, $\frac{B}{g}$, $\frac{C}{g}$, si avranno pure nelle formole

$$\cos(xp) = \frac{OP}{OA}, \quad \cos(y p) = \frac{OP}{OB}, \quad \cos(zp) = \frac{OP}{OC},$$

dalle quali si trae

$$\frac{1}{OA} = \frac{1}{OP} \cos(xp), \quad \frac{1}{OB} = \frac{1}{OP} \cos(y p), \quad \frac{1}{OC} = \frac{1}{OP} \cos(zp);$$

cosicchè l'equazione del piano si cangia in

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} + \frac{z}{OC} = 1.$$

Dunque: Dato un piano distante dall'origine O per l'intervallo OP e segante gli assi ne' punti A , B , C , se sopra ciascuna delle rette OP , OA , OB , OC si misuri una lunghezza eguale al *valore reciproco* della stessa retta, tra i quattro segmenti così ottenuti

$$\frac{1}{OP}, \quad \frac{1}{OA}, \quad \frac{1}{OB}, \quad \frac{1}{OC},$$

sussisterà questa relazione che « *le proiezioni del primo segmento sopra i tre assi Ox , Oy , Oz , saranno rappresentate dai tre ultimi segmenti* ».

Ed ecco ormai posto in chiaro, nel primo sistema semplice, il significato geometrico delle *coordinate de' punti e delle coordinate conjugate de' piani* (Art. I, § 1° e 2°).

Nell' equazione del piano

$$Ax + By + Cz = D = g \cdot OP,$$

se le coordinate x, y, z di un punto M sono sugli assi Ox, Oy, Oz le componenti del raggio vettore OM , le coordinate A, B, C del piano P saranno sopra i detti assi le proiezioni ortogonali della retta g perpendicolare al piano

medesimo in un punto distante dall' origine O per $OP = \frac{D}{g}$.

Inoltre, se si fa $D = 1$, sarà

$$g = \frac{1}{OP}, \quad A = \frac{1}{OA}, \quad B = \frac{1}{OB}, \quad C = \frac{1}{OC},$$

dove OA, OB, OC sono le parti degli assi Ox, Oy, Oz comprese tra l' origine O ed il piano P .

Le coordinate del piano mobile sotto questa forma sono state introdotte dal PLÜCHER, il quale pare essere stato il primo a rappresentare analiticamente le linee curve come *inviluppo* di rette, e le superficie come *inviluppo di piani*, aprendo così una via nuova alla ricerca delle loro proprietà.

L' equazione del piano si può anche esprimere in funzione del RAGGIO VETTORE $OM = r$ e della sua DIREZIONE lmn , intendendo per l, m, n le componenti che ha sugli assi Ox, Oy, Oz UNA LINEA = 1 presa sullo stesso raggio OM . Infatti in questa supposizione di

$$l = \frac{\text{sen}(yz, r)}{\text{sen}(yz, x)}, \quad m = \frac{\text{sen}(zx, r)}{\text{sen}(zx, y)}, \quad n = \frac{\text{sen}(xy, r)}{\text{sen}(xy, z)},$$

$$1 = \frac{l^2}{m^2} + 2 \left| \begin{array}{c} mn \cos(yz) \\ nl \cos(zx) \\ lm \cos(xy) \end{array} \right|,$$

le coordinate del punto M si avranno pure nell'espressioni

$$l. OM, m. OM, n. OM;$$

onde l'equazione del piano si trasforma in

$$\frac{l}{OA} + \frac{m}{OB} + \frac{n}{OC} = \frac{1}{OM}.$$

E se qui per x, y, z s'intendano le coordinate di un punto m segnato ad arbitrio sul raggio OM , l'equazione precedente moltiplicata per Om diverrà

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} + \frac{z}{OC} = \frac{Om}{OM},$$

formola di qualche importanza per le applicazioni che possono farsene.

Quando le x, y, z si vogliono riguardare non come componenti ma come coordinate proiezioni del punto M , allora, nell'equazione $Ax + By + Cz = D$, le coordinate conjugate A, B, C di un piano mobile saranno sugli assi Ox, Oy, Oz le componenti della retta g perpendicolare

al piano in un punto distante dall'origine O per $OP = \frac{D}{g}$.

Ciò è reso manifesto per la proprietà della risultante richiamata superiormente.

NOTA. A rendere omogenea un'equazione rispetto alle coordinate, si sogliono queste rappresentare coi rapporti $x:t, y:t, z:t$, considerando la t come una quarta variabile indipendente, alla quale negli ultimi risultati si dà un opportuno valore. Per questa convenzione, l'equazione di una superficie $f(x, y, z, t) = 0$, divenuta omogenea rispetto alle variabili $xyzt$, si potrà scrivere sotto la forma

$$\frac{df}{dx} x + \frac{df}{dy} y + \frac{df}{dz} z + \frac{df}{dt} t = 0$$

e l'equazione del piano tangente sarà

$$\frac{df}{dx} x' + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dz} z' + \frac{df}{dt} t = 0,$$

ovvero

$$\frac{df}{dx} x' + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dz} z' = \frac{df}{dx} x + \frac{df}{dy} y + \frac{df}{dz} z.$$

Questa formola (supposto $t = 1$) si ottiene ancora partendo dal considerare il significato geometrico dell'equazione differenziale

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0,$$

siccome esprime la proprietà or citata della risultante.

Per la stessa convenzione l'equazione di un piano dato si scrive

$$Ax + By + Cz + Dt = 0,$$

ponendo ordinariamente, a operazioni finite, $t = -1$.

§ 2.° Sistema di coordinate segmentarie sovr' assi divergenti da un punto.

Tre punti fissi A, B, C presi sugli assi Ox, Oy, Oz , ed un quarto punto arbitrario m formano una piramide triangolare $ABCm$ che col *vertice mobile* m può segnare la posizione di qualsivoglia punto dello spazio, posto fuori del piano della *base fissa* ABC . I piani delle tre facce $BCm, CA m, ABm$, girevoli sui lati BC, CA, AB , taglieranno gli assi opposti Ox, Oy, Oz rispettivamente in tre punti a, b, c , che si moveranno e si fermeranno al muoversi ed al fermarsi del vertice m . Cerchiamo adunque di esprimere le coordinate x, y, z del punto m , già contemplate nel primo sistema, in funzione di quantità relative ai punti mobili a, b, c .

Considerando il punto m siccome appartenente al raggio vettore Om ed al piano BCm , le sue coordinate x, y, z saranno vincolate dalle due equazioni

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} + \frac{z}{OC} = \frac{Om}{OM}, \quad \frac{x}{Oa} + \frac{y}{Ob} + \frac{z}{Oc} = 1,$$

la seconda delle quali sottratta dalla prima fornisce

$$x \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{Oa} \right) = \frac{Om}{OM} - 1$$

e quindi

$$\frac{x}{OA} = \frac{Mm}{OM} \cdot \frac{Oa}{Aa},$$

donde, per ragion di simmetria,

$$\frac{x}{OA} = \frac{Mm}{OM} \cdot \frac{Oa}{Aa}, \quad \frac{y}{OB} = \frac{Mm}{OM} \cdot \frac{Ob}{Bb}, \quad \frac{z}{OC} = \frac{Mm}{OM} \cdot \frac{Oc}{Cc},$$

e sommando

$$\frac{Mm}{OM} \left(\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} \right) = \frac{Om}{OM} = \frac{Mm}{OM} + 1.$$

Abbiamo così il quadro delle formole

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{OA} = \frac{Mm}{OM} \cdot \frac{Oa}{Aa}, \\ \frac{y}{OB} = \frac{Mm}{OM} \cdot \frac{Ob}{Bb}, \\ \frac{z}{OC} = \frac{Mm}{OM} \cdot \frac{Oc}{Cc}, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{OM}{Mm} = \frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} - 1, \\ \frac{Mm}{OM} = \frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} + \frac{z}{OC} - 1, \end{array} \right.$$

per le quali le x, y, z si esprimono in funzione di $\frac{Oa}{Aa}$, $\frac{Ob}{Bb}$, $\frac{Oc}{Cc}$, e viceversa.

Sia data, nel primo sistema, l'equazione

$$Lx + My + Nz = R;$$

sostituendo in essa le x, y, z espresse in funzione delle nuove coordinate, si ottiene

$$(R - L \cdot OA) \frac{Oa}{Aa} + (R - M \cdot OB) \frac{Ob}{Bb} + (R - N \cdot OC) \frac{Oc}{Cc} = R.$$

Supposto che il piano rappresentato da quest'equazione segli gli assi x, y, z ne' punti a_1, b_1, c_1 , se si pone

$$R = 1, \quad L = \frac{1}{Oa_1}, \quad M = \frac{1}{Ob_1}, \quad N = \frac{1}{Oc_1},$$

l'equazione si muta nella seguente

$$\frac{Aa_1}{Oa_1} \cdot \frac{Oa}{Aa} + \frac{Bb_1}{Ob_1} \cdot \frac{Ob}{Bb} + \frac{Cc_1}{Oc_1} \cdot \frac{Oc}{Cc} = 1.$$

E si conchiude che: *In questo secondo sistema semplice le coordinate de' punti m e le coordinate conjugate de' piani sono (Art. I, § 1.° e 2.°)*

$$\left(\frac{Oa}{Aa}, \frac{Ob}{Bb}, \frac{Oc}{Cc} \right), \quad \left(\frac{Aa_1}{Oa_1}, \frac{Bb_1}{Ob_1}, \frac{Cc_1}{Oc_1} \right).$$

Inoltre, dato che lo stesso piano sia rappresentato da ciascuna delle due equazioni

$$Lx + My + Nz = R,$$

$$\lambda \frac{Oa}{Aa} + \mu \frac{Ob}{Bb} + \nu \frac{Oc}{Cc} = R,$$

le coordinate λ, μ, ν de' piani nel 2.^o sistema saranno vincolate alle coordinate L, M, N de' piani nel 1.^o sistema dalle relazioni

$$\lambda = R - L.OA, \mu = R - M.OB, \nu = R - N.OC,$$

mercè delle quali si potrà passare, a nostro piacimento, dall' un sistema all' altro.

Questo sistema è stato proposto e adoperato la prima volta dal Sig. CHASLES, che lo stabilì con principii affatto diversi dagli esposti, e senza cercarne le relazioni colle coordinate componenti o proiezioni (*Correspondance physique et mathématique par M. A. Quetelet, tom. VI. an. 1830*).

§ 3.^o Sistema di coordinate segmentarie sovr' assi paralleli.

Tre assi Ax, By, Cz paralleli tra loro e traenti l' origine dai vertici di un triangolo ABC , potendo essere riguardati come assi concorrenti in un punto O che si è andato allontanando all' infinito, danno nascita ad un nuovo sistema di coordinate sì di punti che di piani. Imperocchè, per questa supposizione di O all' infinito, la retta Mm appartenente al raggio OM essendo divenuta parallela agli assi Ax, By, Cz , e ciascuno de' rapporti

$$\frac{Oa}{Oa_1} = 1 + \frac{aa_1}{Oa_1}, \text{ etc.}$$

equivalendo all' unità, le due equazioni del sistema precedente

$$\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = \frac{Om}{Mm},$$

$$\frac{Aa_1}{Oa_1} \cdot \frac{Oa}{Aa} + \frac{Bb_1}{Ob_1} \cdot \frac{Ob}{Bb} + \frac{Cc_1}{Oc_1} \cdot \frac{Oc}{Cc} = 1,$$

si muteranno nelle seguenti

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{Aa} + \frac{1}{Bb} + \frac{1}{Cc} = \frac{1}{Mm} \\ \frac{Aa_1}{Aa} + \frac{Bb_1}{Bb} + \frac{Cc_1}{Cc} = 1, \end{cases}$$

l'ultima delle quali fa palese che, nel sistema degli assi paralleli, le coordinate del punto m e le conjugate del piano $a_1b_1c_1$ sono

$$\left(\frac{1}{Aa}, \frac{1}{Bb}, \frac{1}{Cc} \right), (Aa_1, Bb_1, Cc_1),$$

cioè le prime sono i *valori reciproci de' segmenti* Aa, Bb, Cc che i tre piani mobili BCm, CAm, ABm della piramide $ABCm$ determinano sugli assi Ax, By, Cz a partire dalla base; e le seconde sono i valori de' segmenti Aa_1, Bb_1, Cc_1 che il piano $a_1b_1c_1$ taglia sugli stessi assi.

L'equazioni (1) si possono anche ricavar direttamente dal principio del punto risultante. Se i pesi de' tre vertici A, B, C siano rappresentati dai rapporti de' triangoli parziali BMC, CMA, AMB al triangolo totale ABC , e se si prendano i momenti di questi pesi rispetto al piano $a_1b_1c_1$ sopra cui si muove il punto m , avremo:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{BMC}{ABC} + \frac{CMA}{ABC} + \frac{AMB}{ABC} = 1, \\ \frac{BMC}{ABC} Aa_1 + \frac{CMA}{ABC} Bb_1 + \frac{AMB}{ABC} Cc_1 = Mm. \end{cases}$$

Or quest'equazione, se si considera rispetto al piano BCm pel quale si ha

$$Aa_1 = Aa, \quad Bb_1 = 0, \quad Cc_1 = 0,$$

fornisce $\frac{BMC}{ABC} = \frac{Mm}{Aa}$, e poscia, per simile ragione,

$$\frac{CMA}{ABC} = \frac{Mm}{Bb}, \quad \frac{AMB}{ABC} = \frac{Mm}{Cc}.$$

Per queste relazioni l'equazioni (2) si mutano nelle (1).

L'equazioni (2) equivalgono pure alle seguenti

$$ax + by + cz = 2\Delta,$$

$$ax \cdot Aa_1 + by \cdot Bb_1 + cz \cdot Cc_1 = 2\Delta \cdot Mm,$$

nelle quali per x, y, z s' intendono le perpendicolari che dal punto M scendono ai lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ del triangolo $ABC = \Delta$.

Quando il punto m si muove nel piano degli assi paralleli Ax, By , supposto che il peso di ciascuno de' tre punti A, B, M (situati in linea retta) sia proporzionale alla distanza degli altri due, e che i momenti siano presi rispetto alla retta a_1b_1 sopra cui muovesi il punto m , avremo

$$\frac{AM}{AB} + \frac{MB}{AB} = 1,$$

$$\frac{MB}{AB} Aa_1 + \frac{AM}{AB} Bb_1 = Mm.$$

Quest' ultima considerata rispetto alle rette Bm, Am dà

$$\frac{MB}{AB} = \frac{Mm}{Aa}, \quad \frac{AM}{AB} = \frac{Mm}{Bb}.$$

Si ha dunque

$$\frac{1}{Aa} + \frac{1}{Bb} = \frac{1}{Mm}, \quad \frac{Aa_1}{Aa} + \frac{Bb_1}{Bb} = 1.$$

§ 4.º Sistema di coordinate triangolari di punti e di rette.

Siano dati in un piano tre punti fissi A, B, C , vertici di un triangolo, ed un quarto punto M *corrente nel piano*. Se a ciascuno di questi quattro punti si attribuisca un peso eguale al doppio dell' area del triangolo individuato dai tre punti rimanenti, il punto corrente M (di peso costante ed uguale a due volte l' area Δ del triangolo ABC) sarà determinato in ogni sua posizione dai pesi variabili $2BMC, 2CMA, 2AMB$ de' vertici A, B, C . Eguagliando il momento del punto risultante alla somma de' momenti de' punti componenti, presi rispetto ad una retta qualsivoglia (μ), si avrà

$$2\Delta\mu = ax \cdot \xi + by \cdot \eta + cz \cdot \zeta,$$

oltre

$$2\Delta = ax + by + cz,$$

dove le x, y, z sono le perpendicolari che dal punto M vanno ai lati $BC = a, CA = b, AB = c$, e le μ, ξ, η, ζ sono le perpendicolari che dai punti M, A, B, C vanno alla retta (μ).

La prima dell' equazioni precedenti, ove si scriva sotto la forma

$$2\Delta \cdot \mu = a\xi \cdot x + b\eta \cdot y + c\zeta \cdot z,$$

diviene la traduzione dell' altro principio « *Il momento della retta risultante, rispetto ad un punto M , è uguale alla somma de' momenti delle rette componenti* ». In fatti se la quantità numerica 2Δ si riguarda come *rappresentante una retta situata sulla linea indefinita (μ)*, questa retta avrà necessariamente per componenti le linee

$$a\xi, b\eta, c\zeta$$

situate sopra i lati a, b, c del triangolo. Imperocchè la distanza μ dovendo egualmente annullarsi e nell' ipotesi che il punto M si muova sulla retta data (μ), e nell' ipotesi che si muova sulla retta ove si trova la risultante delle

linee $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$, le due rette non possono essere altro che una sola e medesima retta.

Essendo adunque $2\Delta = \text{ris}(a\xi, b\eta, c\zeta)$, sarà

$$4\Delta^2 = \begin{vmatrix} a^2\xi^2 & bc\eta\xi\cos A \\ b^2\eta^2 & ca\xi\zeta\cos B \\ c^2\zeta^2 & ab\xi\eta\cos C \end{vmatrix}$$

dove A, B, C dinotano gli angoli interni del triangolo ABC , supplementi degli angoli (bc) , (ca) , (ab) onde ciascuno de' tre lati b, c, a devia dal precedente. Per quest' equazione, dati che siano i rapporti di due delle tre ξ, η, ζ alla terza, per es. a ζ , si conoscerà il valor numerico q

del rapporto $\frac{2\Delta}{\zeta}$, ed appresso il valor numerico di ciascu-

na delle tre perpendicolari ξ, η, ζ che dai vertici A, B, C vanno alla retta (μ) .

Osserviamo adesso che, a cagione del suo doppio significato geometrico, la equazione

$$(\mu) \quad a\xi z + b\eta y + c\zeta z = 0$$

rappresenta una retta ovvero un punto secondochè si suppongono variabili le x, y, z , ovvero le ξ, η, ζ .

Se sono dati i rapporti di due delle tre quantità ξ, η, ζ alla terza, l' equazione (μ) rappresenta la *retta fissata nella posizione dalla risultante delle $a\xi, b\eta, c\zeta$* , e sopra cui corre il punto M al variare de' pesi ax, by, cz posti ne' vertici A, B, C .

Se invece sono dati i rapporti di due delle tre quantità x, y, z alla terza, l' equazione (μ) rappresenterà il *punto M fissato nella posizione dai pesi dati ax, by, cz* , posti ne' vertici A, B, C , punto intorno a cui girerà la retta (μ) al variare delle componenti $a\xi, b\eta, c\zeta$ situate sui lati BC, CA, AB .

Si può dunque ritenere: 1.° Che le *coordinate triangolari di un punto M* sono i *tre pesi variabili ax, by, cz*

de' vertici A, B, C , de' quali il peso risultante è quello dello stesso punto M ; 2.° Che le *coordinate triangolari di una retta mobile* sono, sopra i lati BC, CA, AB , le *componenti variabili* $a\xi, b\eta, c\xi$, delle quali la risultante è situata sulla stessa retta mobile.

È poi da notarsi:

a). Che quando il punto M corre sopra una retta passante per due vertici del triangolo ABC , risulterà eguale a zero il peso del terzo vertice, e che quando il punto M sta sopra un vertice, sono eguali a zero i pesi degli altri due;

b). Che quando la retta mobile (μ) si applica ad un lato del triangolo ABC , diventano eguali a zero le sue coordinate sugli altri due lati, e che quando gira intorno ad uno de' tre vertici A, B, C , diviene eguale a zero la sua coordinata sopra il lato opposto a quel vertice.

c). Che osservazioni simili avranno luogo per le coordinate tetraedriche sia di punti, sia di piani.

Devesi a Mönius il concetto di considerare come coordinate di un punto i pesi variabili de' vertici di un triangolo o di un tetraedro, da lui chiamato *triangolo o tetraedro fondamentale*. Sopra questo concetto principalmente si fonda il *Calcolo Baricentrico* dell' illustre autore.

Il significato geometrico delle coordinate triangolari, sia di punti, sia di rette, offre d' ordinario un mezzo facile ed elegante per trovare e dimostrare le formole risguardanti le relazioni metriche. Per esempio: Siano date l' equazioni di due rette

$$lx + my + nz = 0, \quad l'x + m'y + n'z = 0,$$

e si voglia trovare il *coseno* ed il *seno* dell' angolo formato dalle due rette. Quest' angolo essendo quello delle due risultanti

$$r = \text{ris.}(l, m, n), \quad r' = \text{ris.}(l', m', n'),$$

si avrà dall' equazioni

$$rr' \cos(r r') = l r_a + m' r_b + n' r_c,$$

$$rr' \sin(r r') = l r' \sin(a r') + m' r' \sin(b r') + n' r' \sin(c r'),$$

dove pel simbolo r_a , ec. s' intende la proiezione ortogonale di una retta r sopra un'altra a . La prima di quest'equazioni è la traduzione della proprietà della risultante già richiamata di sopra (1.° sistema), e la seconda si riferisce alla proiezione della risultante r e delle sue componenti l, m, n sopra una retta perpendicolare ad r' . Ciò posto, la proprietà onde si definisce la risultante somministra

$$\begin{aligned} r_a &= l + m \cos(ab) + n \cos(ac) \\ &= l - m \cos C - n \cos B, \quad r_b = \text{ec.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r' \sin(ar') &= m' \sin(ab) + n' \sin(ac) \\ &= m' \sin C - n' \sin B, \quad r' \sin(br') = \text{ec.} \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori di r_a , ec.; di $r' \sin(ar')$, ec. nelle due equazioni di sopra, otterremo

$$\begin{array}{l} ll' \\ rr' \cos(rr') = mm' - \\ nn' \end{array} \left| \begin{array}{l} (mn' + m'n) \cos A \\ (nl' + n'l) \cos B \\ (lm' + l'm) \cos C, \end{array} \right.$$

$$rr' \sin(rr') = (mn' - m'n) \sin A + (nl' - n'l) \sin B + (lm' - l'm) \sin C.$$

Le coordinate di un punto M , od i pesi variabili $2BMC$, $2CMA$, $2AMB$, si esprimeranno in appresso non più per ax, by, cz , ma semplicemente per x, y, z ; cosicchè il peso del punto risultante M sarà

$$x + y + z = 2\Delta,$$

e le $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ saranno le *perpendicolari* che dal punto M vanno ai lati BC, CA, AB del triangolo fondamentale.

In un punto O , preso ad arbitrio nel piano del triangolo fondamentale, s' intendano coordinati tre assi Ox, Oy, Oz

perpendicolari ai lati BC , CA , AB , e ciascun asse si conti *positivamente* dalla parte che guarda l'*interno* del lato corrispondente. Gli angoli (yz) , (zx) , (xy) compresi tra questi assi positivi saranno eguali agli angoli (bc) , (ca) , (ab) onde la direzione di ciascun lato devia dalla direzione del lato che precede. E qui giova notare che, se i lati a , b , c si volessero rappresentare con eguali segmenti degli assi Ox , Oy , Oz , la risultante di questi segmenti sarà $= 0$.

Quando si dirà DIREZIONE lmn di una retta r , le quantità l , m , n dinoteranno sugli assi Ox , Oy , Oz le proiezioni di una linea $= 1$ e parallela ad r , vale a dire

$$l = \cos(xr), \quad m = \cos(yr), \quad n = \cos(zr);$$

onde le proiezioni omologhe di r saranno

$$r_x = lr, \quad r_y = mr, \quad r_z = nr.$$

De' tre *elementi* della direzione lmn uno solo alla volta può diventare $= 0$. Così quando la retta r è perpendicolare all'asse x , sarà $= 0$ l'elemento l , ma non già m ed n .

Inoltre, se delle tre proiezioni di r sugli assi x , y , z ne siano date due, per esempio lr , mr , la formola per la quale la retta r si esprime in funzione delle sue proiezioni darà

$$\text{sen}^2(xy) = l^2 + m^2 - 2lm \cos(xy),$$

ossia

$$\text{sen}^2 C = l^2 + m^2 + 2lm \cos C.$$

Supponiamo che la retta r *parta* dal punto $\alpha\beta\gamma$ e *vada* al punto xyz colla direzione lmn . Le proiezioni di r sugli assi Ox , Oy , Oz daranno luogo alle formole

$$lr = \frac{x - \alpha}{a}, \quad mr = \frac{y - \beta}{b}, \quad nr = \frac{z - \gamma}{c},$$

e quindi alle seguenti

$$x = alr + \alpha, \quad y = bmr + \beta, \quad z = cnr + \gamma.$$

In questo modo le coordinate x, y, z si trovano espresse in funzione del raggio vettore r e della sua direzione hnn .

Si osservi che essendo

$$x + y + z = 2\Delta, \quad a + \beta + \gamma = 2\Delta$$

e però $x - a + y - \beta + z - \gamma = 0$, sarà

$$ar_x + br_y + cr_z = 0,$$

ovvero

$$al + bm + cn = 0,$$

equazione che acquista un' evidenza geometrica ove i lati a, b, c s' intendano *rappresentati* sugli assi Ox, Oy, Oz ; essendochè quel trinomio dev' essere uguale al prodotto della *ris.* (a, b, c) , che è $= 0$, per la proiezione che le vien sopra da un raggio vettore r qualsivoglia.

§ 4.° Sistema di coordinate tetraedriche di punti e di piani.

Siano dati quattro punti fissi A, B, C, D vertici di un tetraedro V , ed un quinto punto M corrente nello spazio. Se a ciascuno di questi cinque punti si attribuisca un peso eguale a tre volte il volume del tetraedro individuato dai quattro punti rimanenti, il punto M (di peso costante ed $= 3V$) sarà determinato in ogni sua posizione dai pesi variabili $3BCDM, 3CDAM, 3DABM, 3ABCM$ de' vertici A, B, C, D . Eguagliando il momento del punto risultante alla somma de' momenti de' punti componenti rispetto ad un piano qualsivoglia (μ) , si avrà

$$3V \cdot \mu = ax \cdot \xi + by \cdot \eta + cz \cdot \zeta + dt \cdot \tau,$$

oltre

$$3V = ax + by + cz + dt,$$

dove x, y, z, t sono le perpendicolari che dal punto M vanno alle facce a, b, c, d del tetraedro fondamentale,

e le μ , ξ , η , ζ , τ sono le perpendicolari che da' punti M , A , B , C , D scendono sul piano (μ).

La prima dell' equazioni precedenti, ove si scriva sotto la forma

$$3V \cdot \mu = a\xi \cdot x + b\eta \cdot y + c\zeta \cdot z + d\tau \cdot t.$$

diviene la traduzione del principio: « *Il momento dell' area risultante, rispetto ad un punto M , è uguale alla somma de' momenti delle aree componenti* ». Infatti se la quantità numerica $3V$ si riguarda come *rappresentante* un' area situata sul piano (μ), quest' area ha necessariamente per componenti le aree

$$a\xi, \quad b\eta, \quad c\zeta, \quad d\tau$$

situate sopra i piani delle facce a , b , c , d del tetraedro. Imperocchè la distanza μ dovendo egualmente annullarsi e nell' ipotesi che il punto M si muova sul piano dato (μ), e nell' ipotesi che si muova sul piano ove si trova l' area risultante delle aree $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$, $d\tau$, i due piani non possono esser altro che un solo e medesimo piano.

Rimane così dimostrato un nuovo teorema fondamentale espresso dalla formola

$$3V = \text{ris.}(a\xi, b\eta, c\zeta, d\tau),$$

ed è che: *Date sulle facce a , b , c , d del tetraedro le aree COMPONENTI $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$, $d\tau$, l' area RISULTANTE sarà sempre $= 3V$ e situata sul piano a cui vanno le perpendicolari ξ , η , ζ , τ dai vertici A , B , C , D . Per questo teorema, dati che siano i rapporti di tre delle ξ , η , ζ , τ alla quarta, per es. a τ , si conoscerà il valor numerico*

q del rapporto $\frac{3V}{\tau}$, e quindi il valore di ciascuna delle quattro perpendicolari ξ , η , ζ , τ .

Osserviamo adesso che, a cagione del suo doppio significato geometrico, la equazione

$$(\mu) \quad a\xi x + b\eta y + c\xi z + d\tau = 0$$

rappresenta un piano ovvero un punto secondochè si suppongono variabili le x, y, z, t ovvero le ξ, η, ζ, τ .

Se sono dati i rapporti di tre delle quattro quantità ξ, η, ζ, τ alla quarta, l'equazione (μ) rappresenta il piano fissato nella posizione dalla risultante delle aree $a\xi, b\eta, c\xi, d\tau$, e sopra cui corre il punto M al variare de' pesi ax, by, cz, dt posti ne' vertici A, B, C, D .

Se invece sono dati i rapporti di tre delle quattro quantità x, y, z, t alla quarta, l'equazione (μ) rappresenterà il punto M fissato nella posizione dai pesi dati ax, by, cz, dt posti ne' vertici A, B, C, D , punto intorno a cui girerà il piano (μ) al variare delle aree componenti $a\xi, b\eta, c\xi, d\tau$ situate sulle facce BCD, CDA, DAB, ABC .

Si può dunque ritenere: 1.° Che le coordinate tetraedriche di un punto M sono i quattro pesi variabili ax, by, cz, dt de' vertici A, B, C, D , de' quali il peso risultante è quello dello stesso punto M ; 2.° Che le coordinate tetraedriche di un piano mobile sono, sopra le facce BCD, CDA, DAB, ABC del tetraedro, le quattro aree variabili $a\xi, b\eta, c\xi, d\tau$ delle quali l'area risultante è sempre situata sullo stesso piano mobile.

Le coordinate di un punto M , od i pesi variabili $3BCDM, 3CDAM, 3DABM, 3ABCM$, si esprimeranno in appresso non più per ax, by, cz, dt , ma semplicemente per x, y, z, t ; cosicchè il peso del punto risultante M sarà

$$x + y + z + t = 3V,$$

e le $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}, \frac{t}{d}$ saranno le perpendicolari che dal punto M scendono sulle facce a, b, c, d del tetraedro fondamentale.

In un punto O preso ad arbitrio s'intendano coordinati quattro assi Ox , Oy , Oz , Ot perpendicolari alle facce a , b , c , d , e ciascuno si conti *positivamente* dalla parte che guarda l'*interno* della faccia corrispondente. Gli angoli (yz) , (zx) , (xy) , (xt) , (yt) , (zt) compresi tra questi assi positivi saranno eguali agli angoli (bc) , (ca) , (ab) , (ad) , (bd) , (cd) onde ciascuna delle facce del tetraedro devia da una delle facce contigue, e però questi angoli saranno supplementi degli angoli interni del tetraedro. E qui giova notare che, quando le *facce interne* a , b , c , d s'intendono *rappresentate* con eguali segmenti de' loro assi Ox , Oy , Oz , Ot , la risultante di questi segmenti è $= 0$.

Allorchè si dirà *DIREZIONE* $lmnp$ di una retta r , le quantità l , m , n , p dinoteranno sugli assi Ox , Oy , Oz , Ot le proiezioni di una *linea* $= 1$ e *parallela* ad r , vale a dire

$$l = \cos(xr), \quad m = \cos(yr), \quad n = \cos(zr), \quad p = \cos(tr).$$

Supponiamo che la retta r *parta* dal punto $a\beta\gamma\delta$ e *vada* al punto $xyzt$ colla *direzione* $lmnp$; le proiezioni di r sugli assi daranno luogo alle formole

$$lr = \frac{x-a}{a}, \quad mr = \frac{y-\beta}{b}, \quad nr = \frac{z-\gamma}{c}, \quad pr = \frac{t-\delta}{d},$$

e quindi alle seguenti

$$x = alr + a, \quad y = bmr + \beta, \quad z = cnr + \gamma, \quad t = dpr + \delta.$$

In questo modo le coordinate x , y , z , t si trovano espresse in funzione del raggio vettore r e della sua direzione $lmnp$.

Infine si ponga mente alle seguenti avvertenze:-

1.^a Le due equazioni

$$\begin{aligned} ar_x + br_y + cr_z + dr_t &= 0, \\ al + bm + cn + dp &= 0, \end{aligned}$$

acquistano un' evidenza geometrica ove le facce a, b, c, d s' intendano rappresentate dai loro assi, essendo

$$ris.(a, b, c, d) = 0.$$

2.^a De' quattro elementi della direzione $lmnp$ due soli alla volta, e non più, possono diventare uguali a zero. Così quando la retta r è perpendicolare al piano xy , saranno eguali a zero gli elementi l ed m , ma non già n e p .

3.^a Se delle quattro proiezioni di r sugli assi Ox, Oy, Oz, Ot , ne siano date tre, per esempio lr, mr, nr , la formola nota per la quale r si esprime in funzione di queste proiezioni darà

$$H^2 = \begin{array}{l} l^2 \operatorname{sen}^2(yz) \\ m^2 \operatorname{sen}^2(xz) - 2 \\ n^2 \operatorname{sen}^2(xy) \end{array} \left| \begin{array}{l} mn \operatorname{sen}(xz) \operatorname{sen}(xy) \cos x \\ nl \operatorname{sen}(xy) \operatorname{sen}(yz) \cos y \\ lm \operatorname{sen}(yz) \operatorname{sen}(xz) \cos z \end{array} \right.$$

L' esposte formole mostrano aperta la via per la quale dalle coordinate relative al triangolo ed al tetraedro si passa alle coordinate relative a due od a tre assi divergenti da un punto. Quasi a modo di schiarimento aggiungo la discussione dell' equazione di secondo grado espressa successivamente in coordinate triangolari ed in coordinate tetraedriche.

ARTICOLO IV.

§ 1.^o Discussione dell' equazione generale di 2.^o grado in coordinate triangolari x, y, z di punti.

Supponiamo che l' equazione

$$E(x, y, z) = 0$$

omogenea in coordinate triangolari di un punto corrente xyz , sia la più generale di 2.^o grado

$$(E) \quad \begin{array}{l} E_x x^2 \\ E_y y^2 + 2 \\ E_z z^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} E_{yz} yz \\ E_{zx} zx \\ E_{xy} xy \end{array} \right. = 0,$$

ove uno de' sei coefficienti E_x, E_y ec. si può ad arbitrio riguardar come dato (*). Quest' equazione, senza perdere in nulla la sua generalità, può eziandio essere scritta sotto una qualunque delle forme

$$(E)_1 \quad a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + (a'x + b'y + c'z)(x + y + z) = 0,$$

$$(E)_2 \quad (a_1 x + b_1 y + c_1 z)(x + y + z) - (a'xy + b'xz + c'yz) = 0;$$

in ciascuna delle quali entrano sei coefficienti indeterminati ($a_1, b_1, c_1, a', b', c'$), e di più il *fattore costante*

$$x + y + z = 2\Delta.$$

Infatti dalla seconda $(E)_1$ si passa alla prima (E) ponendo

$$\begin{cases} E_x = a_1 + a', \\ E_y = b_1 + b', \\ E_z = c_1 + c'; \end{cases} \quad \begin{cases} 2E_{yz} = b' + c', \\ 2E_{zx} = c' + a', \\ 2E_{xy} = a' + b'; \end{cases}$$

e viceversa, si passa dalla prima (E) alla seconda $(E)_1$ ponendo

$$\begin{cases} a' = E_{xz} + E_{xy} - E_{yz}, \\ b' = E_{xy} + E_{yz} - E_{xz}, \\ c' = E_{yz} + E_{xz} - E_{xy}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = E_x + E_{yz} - E_{yz} - E_{xz}, \\ b_1 = E_y + E_{xz} - E_{yz} - E_{xy}, \\ c_1 = E_z + E_{xy} - E_{xz} - E_{yz}. \end{cases}$$

Similmente, dalla terza $(E)_2$ si passa alla prima (E) ponendo

$$\begin{aligned} E_x &= a_1, & E_y &= b_1, & E_z &= c_1, \\ 2E_{yz} &= b_1 + c_1 - a', & 2E_{zx} &= c_1 + a_1 - b', & 2E_{xy} &= a_1 + b_1 - c'; \end{aligned}$$

e viceversa, dalla (E) si passa alla $(E)_2$ ponendo

$$\begin{aligned} a_1 &= E_x, & b_1 &= E_y, & c_1 &= E_z, \\ a' &= E_y + E_z - 2E_{yz}, & b' &= E_z + E_x - 2E_{zx}, & c' &= E_x + E_y - 2E_{xy}. \end{aligned}$$

Supponendo che gli Ox, Oy, Oz siano perpendicolari ai lati a, b, c del triangolo fondamentale, in quel modo che sopra si è dichiarato, quando la linea rappresentata dalla (E) si vuole riferire a due di questi assi, p. es. ad Ox, Oy , basta porre l'origine O nel vertice C di esso triangolo ABC , e poi sostituire in (E)

$$z = -x - y + 2\Delta;$$

(*) In ciascuna delle notazioni E_{yz}, E_{zx}, E_{xy} si alternerà talvolta il posto delle due lettere che sono al piede di E ; così $E_{yz} = E_{zy}$.

e la (E) diverrà

$$(E)_z \quad Ax^2 + By^2 + 2Cxy - 2(A'x + B'y) + D = 0,$$

fatto

$$\begin{cases} A = E_z + E_x - 2E_{zx}, & \begin{cases} A' = 2\Delta(E_z - E_{zx}), \\ B = E_z + E_y - 2E_{zy}; \end{cases} \\ B = E_z + E_y - 2E_{zy}; & \begin{cases} B' = 2\Delta(E_z - E_{zy}); \\ C = E_z + E_{xy} - E_{zx} - E_{yz}; \end{cases} \\ C = E_z + E_{xy} - E_{zx} - E_{yz}; & D = 4\Delta^2 E_z. \end{cases}$$

Nella linea rappresentata dall'equazione (E) si tratti ora di cercare la *polare di un punto*, i *diametri*, il *centro*, la *direzione ed il valore de' raggi principali*, ed i *criterii per conoscerne la specie e la varietà*.

Nella (E) sostituendo

$$x = ar + a, \quad y = br + \beta, \quad z = cr + \gamma,$$

si ottiene

$$(r) \quad Sr^2 + 2Tr + U = 0, \quad \text{ovvero} \quad S + 2T \frac{1}{r} + U \frac{1}{r^2} = 0,$$

dove i *coefficienti estremi* U ed S sono ciò che diviene il polinomio di 2.^o grado

$$E(x, y, z)$$

allorchè alle coordinate x, y, z si sostituiscono successivamente le a, β, γ , e le al, bm, cn , cioè

$$S = E(al, bm, cn), \quad U = E(a, \beta, \gamma).$$

Il *coefficiente medio* 2T è legato ai coefficienti estremi dalle formole

$$2T = \frac{dS}{dl} \frac{a}{a} + \frac{dS}{dm} \frac{\beta}{b} + \frac{dS}{dn} \frac{\gamma}{c},$$

$$2T = \frac{dU}{da} al + \frac{dU}{d\beta} bm + \frac{dU}{d\gamma} cn.$$

I coefficienti S ed U essendo omogenei l'uno rispetto ad l, m, n , e l'altro rispetto ad a, β, γ , danno luogo alle identità

$$2S = \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m + \frac{dS}{dn} n,$$

$$2U = \frac{dU}{da} a + \frac{dU}{d\beta} \beta + \frac{dU}{d\gamma} \gamma.$$

RETTE POLARI DI UN PUNTO. Il raggio r girando intorno ad un punto arbitrario P , od $(a\beta\gamma)$, segnerà la conica (E) in due punti M, M_1 , ora reali, ed ora immaginari, distinti o coincidenti. Sopra il raggio PM_1 si segni il

punto m in modo che il nuovo raggio Pm riesca *medio armonico* tra i due raggi PM , PM_1 , in modo cioè che si abbia

$$\frac{2}{Pm} = \frac{1}{PM} + \frac{1}{PM_1} = -\frac{2T}{U}.$$

Sarà $2T \cdot Pm + 2U = 0$. Quest'equazione, ove ad al. Pm , $bm \cdot Pm$, $cn \cdot Pm$ si sostituisca $x - a$, $y - \beta$, $z - \gamma$, diviene

$$(p) \quad \frac{dU}{da} x + \frac{dU}{d\beta} y + \frac{dU}{d\gamma} z = 0,$$

e rappresenta la *retta polare* del punto $a\beta\gamma$ (Art. I. § 1.^o), retta che in unione alla conica (E) possiede quindi la proprietà di dividere *armonicamente* (nel punto m , conjugato armonico di P rispetto ai due M , M_1) ogni raggio r che dal polo P va ad incontrare la curva. Inoltre la (p), essendo simmetrica rispetto ad $a\beta\gamma$ e ad xyz , fa palese che se una retta (p) gira intorno ad uno de' suoi punti m , od xyz , il polo ($a\beta\gamma$) di (p) scorrerà sopra un'altra retta, polare del punto m .

DIAMETRI. In $Sr^2 + 2T\gamma + U = 0$ facciamo $= 0$ il coefficiente medio $2T$, e supposta costante la direzione lmn , rendasi *corrente* il punto $a\beta\gamma$ sì in T e sì in U , e però alle a , β , γ s'intendano sostituite le x , y , z . L'equazione $2T = 0$, ossia la

$$(T) \quad \frac{dS}{dl} \frac{x}{a} + \frac{dS}{dm} \frac{y}{b} + \frac{dS}{dn} \frac{z}{c} = 0$$

rappresenterà il *diametro conjugato alla direzione lmn* , cioè la *retta che passa per i punti di mezzo xyz di quel sistema di corde parallele $2r$ che hanno la direzione lmn* , e di cui i valori (per ogni punto di mezzo xyz) sono dati dall'equazione

$$Sr^2 + U = 0.$$

Un diametro si dice *principale* quando dimezza ad angolo retto le corde parallele alle quali è conjugato.

Chiamata $2x$ la retta che sopra i lati (a , b , c) del triangolo fondamentale ha per componenti

$$\frac{dS}{dl}, \quad \frac{dS}{dm}, \quad \frac{dS}{dn},$$

la posizione del diametro $T = 0$ sarà determinata da ciò che questo diametro dee avere sopra di sé la retta

$$2x = \text{ris.} \left(\frac{dS}{dl}, \frac{dS}{dm}, \frac{dS}{dn} \right).$$

Le componenti $\frac{dS}{dl}$, $\frac{dS}{dm}$, $\frac{dS}{dn}$ s'intenderanno in appresso misurate sopra i tre assi Ox , Oy , Oz ; onde la loro risultante $2x$ sarà una retta *perpendicolare*

al diametro T , e l'angolo (Tr) che questo diametro fa colle corde $2r$ ad esso conjugate, si avrà dall'equazione

$$2s \cos(rs) = 2s \sin(Tr) = \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m + \frac{dS}{dn} n = 2S,$$

ed allorchè il diametro è principale, sarà

$$\sin(Tr) = 1, \quad s = S.$$

Inoltre una direzione $l'm'n'$ parallela al diametro T , siccome perpendicolare alla retta $2s$, soddisfarà all'equazione

$$\frac{dS}{dl} l' + \frac{dS}{dm} m' + \frac{dS}{dn} n' = 0.$$

La retta (p) abbia la direzione lmn ed incontri nel punto x, y, z , il diametro conjugato ad lmn ; essa sarà pure rappresentata dall'equazioni $x = x_1 + alr$, $y = y_1 + bmr$, $z = z_1 + cmr$. Sostituendo in (p) questi valori di x, y, z , nasce l'equazione

$$\frac{dU}{da} al + \frac{dU}{d\beta} bm + \frac{dU}{d\gamma} cn = 0$$

la quale dimostra che il polo $a\beta\gamma$ di una retta (p) si trova sul diametro conjugato alla direzione della stessa retta.

DIREZIONI CONJUGATE. Due direzioni lmn , $l'm'n'$ si dicono CONJUGATE TRA LORO se soddisfacciano all'equazione

$$\frac{dS}{dl} l' + \frac{dS}{dm} m' + \frac{dS}{dn} n' = 0,$$

vale a dire, se il diametro che è conjugato all'una delle due direzioni riesca parallelo all'altra, e viceversa.

CENTRO. Supponiamo che a, β, γ siano le coordinate del centro della linea (E) , cioè del punto ove restano dimezzate tutte le corde $2r$ che vi passano. L'equazione (r) dovrà ridursi alla forma $Sr^2 + U = 0$, e però il coefficiente medio $2T$ dovrà risultare $= 0$, od essere

$$\frac{dU}{da} al + \frac{dU}{d\beta} bm + \frac{dU}{d\gamma} cn = 0$$

qualunque sia la direzione lmn del raggio r girante intorno al centro $a\beta\gamma$. E poichè la direzione lmn deve, nel suo mutarsi, verificar sempre l'equazione

$$al + bm + cn = 0,$$

per eliminare dalle due equazioni uno de' tre elementi l, m, n , per esempio l , si moltiplichi la 2.^a per 2λ e poi si sottragga dalla 1.^a. Si avrà

$$\left(\frac{dU}{da} - 2\lambda \right) al + \left(\frac{dU}{d\beta} - 2\lambda \right) bm + \left(\frac{dU}{d\gamma} - 2\lambda \right) cn = 0,$$

nella quale i coefficienti di l , m , n si dovranno fare uguali a zero tutti e tre: il primo, perchè si vuole eliminare l ; e ciascuno degli altri due, perchè l'equazione dee verificarsi anche quando m od n è $= 0$. Le coordinate α , β , γ del centro debbono adunque ricavarsi dalle

$$\frac{dU}{d\alpha} = 2\lambda, \quad \frac{dU}{d\beta} = 2\lambda, \quad \frac{dU}{d\gamma} = 2\lambda,$$

ossia dalle seguenti

$$(1) \quad \begin{cases} E_x \alpha + E_{xy} \beta + E_{xz} \gamma = \lambda, \\ E_{yx} \alpha + E_y \beta + E_{yz} \gamma = \lambda, \\ E_{zx} \alpha + E_{zy} \beta + E_z \gamma = \lambda. \end{cases}$$

Per risolvere quest'equazioni, si denoti per Ω il denominator comune delle incognite, ossia il determinante

$$\Omega = E_x E_y E_z + 2 E_{xy} E_{yz} E_{zx} - E_x E^2_{yz} - E_y E^2_{zx} - E_z E^2_{xy}.$$

Sarà

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dE_x} &= E_y E_z - E^2_{yz}, & \frac{d\Omega}{dE_y} &= \text{ec.} \\ \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dE_{yz}} &= E_{zx} E_{xy} - E_x E_{yz}, & \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dE_{zx}} &= \text{ec.} \end{aligned}$$

E le (1) risolte somministrano

$$\begin{aligned} \Omega \alpha &= \lambda \left[\frac{d\Omega}{dE_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dE_{xy}} + \frac{d\Omega}{dE_{xz}} \right) \right], \\ \Omega \beta &= \lambda \left[\frac{d\Omega}{dE_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dE_{yz}} + \frac{d\Omega}{dE_{zy}} \right) \right], \\ \Omega \gamma &= \lambda \left[\frac{d\Omega}{dE_z} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dE_{zx}} + \frac{d\Omega}{dE_{zy}} \right) \right]; \end{aligned}$$

e da queste, in grazia di $\alpha + \beta + \gamma = 2\Delta$, si raccoglie

$$\lambda = 2\Delta \frac{\Omega}{\Theta},$$

fatto

$$\Theta = \frac{d\Omega}{dE_x} + \frac{d\Omega}{dE_y} + \frac{d\Omega}{dE_z} + \frac{d\Omega}{dE_{xy}} + \frac{d\Omega}{dE_{yz}} + \frac{d\Omega}{dE_{zx}}.$$

Così le coordinate del centro sono espresse da frazioni il cui denominator comune è $= \Theta$. Ma se per determinare il centro, la (E) si fosse dapprima scritta sotto la forma $(E)_z$, il denominator comune di α , β si sarebbe trovato $= AB - C^2$.

Questi due denominatori, essendo della stessa dimensione rispetto ai coefficienti E_x ec., E_{yz} ec., debbono certamente essere identici:

$$AB - C^2 = \Theta,$$

come può verificarsi sviluppando l'uno e l'altro membro.

Se le (1) si moltiplicano rispettivamente per α, β, γ e si sommano, risulta

$$U = 4\Delta^2 \frac{\Omega}{\Theta}, \text{ donde } Sr^2 + 4\Delta^2 \frac{\Omega}{\Theta} = 0.$$

Di qui apparisce: 1.° Che, se il raggio vettore r gira intorno al centro $\alpha\beta\gamma$ mutando direzione e lunghezza, il prodotto Sr^2 non varia benchè varii ciascuno de' suoi fattori S, r^2 , e per conseguenza quando l'uno di questi è massimo, l'altro sarà minimo, e viceversa; 2.° Che quando risulta $\Omega = 0$, e Θ diverso da zero, l'equazione $Sr^2 = 0$, e però la (E), rappresenta due rette divergenti le cui direzioni sono date dalle equazioni $S = 0, al + bm + cn = 0$; 3.° Che se, oltre $\Omega = 0$, riesca pure $\Theta = 0$, la (E) rappresenterà due rette o coincidenti o parallele, siccome quelle che soddisfanno alla condizione di avere il centro indeterminato.

Il coefficiente S , sostituendo in esso

$$cn = -(al + bm),$$

riceve la forma

$$S = Aa^2l^2 + Bb^2m^2 + 2Cablm,$$

funzione omogenea de' due elementi l, m che bastano a determinare la direzione di r , e dove A, B, C hanno il significato espresso di sopra. Ciò posto, le formole relative al diametro, alle direzioni conjugate $lm, l'm'$, ed all'angolo (Tr) che il diametro T fa colle corde conjugate, diventano

$$\begin{aligned} (T) \quad \frac{dS}{dl} \frac{x}{a} + \frac{dS}{dm} \frac{y}{b} &= A'l + B'm, \\ \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m' &= 0, \\ 2s \operatorname{sen}(Tr) &= \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m = 2S, \end{aligned}$$

essendo $2s = \operatorname{ris.}\left(\frac{dS}{dl}, \frac{dS}{dm}\right)$; e quando il diametro T è principale si ha

$\operatorname{sen}(Tr) = 1$, ed $s = S$.

DIREZIONI PRINCIPALI. Le direzioni che intorno al centro rendono massimo o minimo il raggio vettore r si dicono *direzioni principali*. La direzione lm , che deve sempre verificar l'equazione

$$\operatorname{sen}^2 C = l^2 + m^2 + 2lm \cos C,$$

quando divien principale dovrà di più rendere massima o minima la quanti-

tà S , e però soddisfare a $dS = 0$. Le direzioni principali debbono dunque inferirsi dall'equazioni

$$\frac{dS}{dl} dl + \frac{dS}{dm} dm = 0,$$

$$(l + m \cos C) dl + (m + l \cos C) dm = 0.$$

I coefficienti di dl e di dm in queste due equazioni essendo rispettivamente proporzionali, il loro rapporto sarà $\frac{2S}{\sin^2 C}$, rapporto che è quello della

somma de' termini antecedenti alla somma de' conseguenti dopo aver moltiplicato sì gli uni che gli altri termini rispettivamente per l , m ; vale a dire, si ha

$$\frac{\frac{dS}{dl}}{l + m \cos C} = \frac{\frac{dS}{dm}}{m + l \cos C} = \frac{2S}{\sin^2 C}.$$

Ma in questa proporzione i primi due antecedenti sono (per definizione) le componenti della retta $2s$ perpendicolare al diametro (T), ed i correlativi conseguenti sono le componenti omologhe di una retta $= \sin^2 C$ avente la direzione lm . Queste due rette sono adunque parallele, e però il diametro (T) conjugato alla direzione lm è un diametro principale, e si ha $\sin(Tr) = 1$, ed $s = S$, vale a dire: la quantità s è ciò che diviene S quando la direzione lm si suppone principale. Inoltre l'equazione

$$\frac{dS}{dl} l' + \frac{dS}{dm} m' = 0,$$

essendo simmetrica rispetto alle due direzioni conjugate lm , $l'm'$, rende manifesto che se l'una di esse è principale, anche l'altra è principale. Le direzioni principali sono adunque conjugate tra loro ad angolo retto.

Ora la $S = Aa^2 l^2 + Bb^2 m + 2Cablm$ offrendo

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dl} = Aa^2 l + Cabm, \quad \frac{1}{2} \frac{dS}{dm} = Bb^2 m + Cabl,$$

la proporzione di sopra si risolve nelle formole

$$s(l + m \cos C) = (Aa^2 l + Cabm) \sin^2 C,$$

$$s(m + l \cos C) = (Bb^2 m + Cabl) \sin^2 C,$$

che, ordinate rispetto ad l , m , diventano

$$Ll + Nm = 0, \quad Mm + Nl = 0.$$

posto

$$L = s - Aa^2 \sin^2 C, \quad M = s - Bb^2 \sin^2 C, \quad N = s \cos C - Cab \sin^2 C.$$

Eliminando l , m si ha $LM - N^2 = 0$, e sviluppando e dividendo per $\text{sen}^2 C$,

$$s^2 - (Aa^2 + Bb^2 - 2Cab \cos C) s + (AB - C^2) a^2 b^2 \text{sen}^2 C = 0.$$

Finalmente quest'equazione, sostituendo

$$\begin{cases} A = E_x + E_x - 2E_{zx}, \\ B = E_x + E_y - 2E_{zy}, \end{cases} \quad \begin{cases} C = E_x + E_{xy} - E_{zx} - E_{zy}, \\ AB - C^2 = \Theta, \end{cases}$$

ed avendo riguardo alle relazioni

$$\begin{aligned} bc \text{sen } A &= ca \text{sen } B = ab \text{sen } C = 2\Delta, \\ a^2 &= a(b \cos C + c \cos B) = 2\Delta(\cot B + \cot C), \\ b^2 &= b(c \cos A + a \cos C) = 2\Delta(\cot C + \cot A), \end{aligned}$$

si trasforma nella

$$(s) \quad s^2 - 2\Delta \begin{Bmatrix} (E_y + E_x - 2E_{yz}) \cot A \\ (E_x + E_x - 2E_{zx}) \cot B \\ (E_x + E_y - 2E_{zy}) \cot C \end{Bmatrix} s + 4\Delta^2 \Theta = 0.$$

Il prodotto delle due radici s_1, s_2 della (s) sarà dunque

$$s_1 s_2 = 4\Delta^2 \Theta.$$

Inoltre l'equazione $Sr^2 + 4\Delta^2 \frac{\Omega}{\Theta} = 0$, ove suppongasi che la direzione lm sia principale, e che per r_1, r_2 s' intendano i raggi principali corrispondenti a s_1, s_2 , offrirà

$$\begin{aligned} s &= -\frac{4\Delta^2}{r^2} \cdot \frac{\Omega}{\Theta}, \quad s_1 s_2 = \left(\frac{4\Delta^2}{r_1 r_2}\right)^2 \frac{\Omega^2}{\Theta^2}, \\ r_1^2 + r_2^2 &= -\frac{\Omega}{\Theta^2} (s_1 + s_2), \quad (r_1 r_2)^2 = \frac{(2\Delta\Omega)^2}{\Theta^3}. \end{aligned}$$

FORMOLE PER LE DIREZIONI PRINCIPALI. Il polinomio che costituisce il primo membro dell'equazione in s e che sarà indicato per (s) , quando si voglia ri-

guardare come $= \frac{LM - N^2}{\text{sen}^2 C}$, ossia come funzione di L, M, N , verrà richiamato col simbolo (σ) . Per questa convenzione, oltre $(\sigma) = (s)$, si avrà

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma)}{dL} &= \frac{M}{\text{sen}^2 C}, \quad \frac{d(\sigma)}{dM} = \frac{L}{\text{sen}^2 C}, \quad \frac{1}{2} \frac{d(\sigma)}{dN} = -\frac{N}{\text{sen}^2 C}; \\ \frac{dL}{ds} &= 1, \quad \frac{dM}{ds} = 1, \quad \frac{dN}{ds} = \cos C; \\ \frac{d(\sigma)}{ds} &= \frac{d(\sigma)}{dL} + \frac{d(\sigma)}{dM} + \frac{d(\sigma)}{dN} \cos C. \end{aligned}$$

Dall'equazioni $LI + Nm = 0$, $Mm + Nl = 0$ si deducono le due

$$Ml^{-1} = -Nm^{-1}, \quad Lm^{-1} = -Nl^{-1},$$

che, moltiplicate rispettivamente per l^{-1} , m^{-1} , danno nascita alla proporzionalità

$$\frac{d(\sigma)}{dL} l^{-2} = \frac{d(\sigma)}{dM} m^{-2} = \frac{d(\sigma)}{dN} \frac{(lm)^{-1}}{2} = \frac{d(s)}{ds} : \operatorname{sen}^2 C,$$

dove l'ultimo rapporto è quello della somma degli antecedenti a quella de' conseguenti dopo averli moltiplicati rispettivamente per 1, 1, $\cos C$. E poichè

$$b^2 \operatorname{sen}^2 C = \frac{4\Delta^2}{a^2}, \quad a^2 \operatorname{sen}^2 C = \frac{4\Delta^2}{b^2}, \quad ab \operatorname{sen}^2 C = \frac{4\Delta^2}{ab}; \text{ così}$$

$$\frac{d(s)}{ds} l^2 = \frac{d(\sigma)}{dL} \operatorname{sen}^2 C = M = s - 4\Delta^2 \frac{B}{a^2},$$

$$\frac{d(s)}{ds} m^2 = \frac{d(\sigma)}{dM} \operatorname{sen}^2 C = L = s - 4\Delta^2 \frac{A}{b^2},$$

$$\frac{d(s)}{ds} lm = \frac{1}{2} \frac{d(\sigma)}{dN} \operatorname{sen}^2 C = -N = 4\Delta^2 \frac{C}{ab} - s \cos C.$$

In generale, sostituendo i valori di A , B , C , ed applicando il principio di simmetria, avremo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(s)}{ds} l^2 &= s - \frac{4\Delta^2}{a^2} (E_y + E_x - 2E_{yz}), \\ \frac{d(s)}{ds} m^2 &= s - \frac{4\Delta^2}{b^2} (E_x + E_z - 2E_{zx}), \\ \frac{d(s)}{ds} n^2 &= s - \frac{4\Delta^2}{c^2} (E_x + E_y - 2E_{xy}); \end{aligned} \right.$$

(lmn)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(s)}{ds} mn &= \frac{4\Delta^2}{bc} (E_x + E_{yz} - E_{xy} - E_{zx}) - s \cos A, \\ \frac{d(s)}{ds} nl &= \frac{4\Delta^2}{ca} (E_y + E_{zx} - E_{yz} - E_{yx}) - s \cos B, \\ \frac{d(s)}{ds} lm &= \frac{4\Delta^2}{ab} (E_z + E_{xy} - E_{zx} - E_{zy}) - s \cos C. \end{aligned} \right.$$

Per ognuna delle radici s_1 , s_2 della (s), queste formole daranno gli elementi l , m , n non solo quanto alla grandezza, ma ben anche quanto al segno (± 1); perchè scelto ad arbitrio il segno di uno solo degli elementi, per es. di l , le ultime due equazioni faranno conoscere il segno degli altri due m ed n .

Limiti delle radici di $(s) = 0$. Tenendo presente l'identità

$$(s) \cdot \operatorname{sen}^2 C = LM - N^2 = \left(s - 4\Delta^2 \frac{A}{b^2}\right) \left(s - 4\Delta^2 \frac{B}{a^2}\right) - \left(s \cos C - 4\Delta^2 \frac{C}{ab}\right)^2,$$

supponiamo che tanto le radici s_1, s_2 di (s) , quanto le $\frac{A}{b^2}, \frac{B}{a^2}$ siano disposte in ordine di grandezza crescente; in questa supposizione le radici saranno separate per la gradazione

$$\frac{s_1}{4\Delta^2} < \frac{A}{b^2} < \frac{B}{a^2} < \frac{s_2}{4\Delta^2}.$$

Infatti se in (s) od in $LM - N^2$ si fa successivamente

$$s = -\infty, \quad \frac{s}{4\Delta^2} = \frac{A}{b^2}, \quad = \frac{B}{a^2}, \quad s = \infty,$$

i risultati avranno i segni $(+, -), (-, +)$.

Dal che si fa manifesto che le due radici s_1, s_2 non possono divenire uguali se non si verificano le relazioni $L = 0, M = 0$, e però anche $N = 0$, ossia

$$\frac{s}{4\Delta^2} = \frac{A}{b^2} = \frac{B}{a^2} = \frac{C}{ab \cos C};$$

ed in questo caso la *direzione arbitraria lmn* soddisfarà sempre alla relazione $S = s$; essendo $S = E(al, bm, cn)$, ossia ciò che diviene $E(x, y, z)$ quando ad x, y, z si sostituisce al, bm, cn .

E da notare che in questo caso la formula (s) offre

$$\frac{s}{\Delta} = \begin{cases} (E_y + E_z - 2E_{yz}) \cot A \\ (E_z + E_x - 2E_{zx}) \cot B = 2\sqrt{\Delta} \Theta. \\ (E_x + E_y - 2E_{xy}) \cot C \end{cases}$$

E chiamata p la potenza del punto $\alpha\beta\gamma$, rispetto al circolo $E(x, y, z) = 0$, l'equazione $Nr^2 + 2Tr + U = 0$ darà $p = \frac{E(\alpha, \beta, \gamma)}{s}$.

CRITERII PER ASSEGNARE LA SPECIE DELLA LINEA (E) . Se la linea rappresentata dalla (E) si riferisce a due assi Ox, Oy divergenti da O colle *direzioni principali*, i termini della 2^a dimensione nella nuova equazione saranno

$$s_1 x^2 + s_2 y^2.$$

Ciò posto, la linea (E) sarà un'ellisse od un'iperbola secondochè i coefficienti s_1, s_2 hanno lo stesso segno o diverso, e sarà una parabola se l'uno di essi risulti = 0. Pertanto tenendo presente che $s_1 s_2 = 4\Delta^2 \Theta$, e che

$$\Omega = E_x E_y E_z + 2E_{yz} E_{xz} E_{xy} - E_x E_{yz}^2 - E_y E_{xz}^2 - E_z E_{xy}^2,$$

$$\Theta = \frac{d\Omega}{dE_x} + \frac{d\Omega}{dE_y} + \frac{d\Omega}{dE_z} + \frac{d\Omega}{dE_{yz}} + \frac{d\Omega}{dE_{xz}} + \frac{d\Omega}{dE_{xy}},$$

la linea (E) sarà

per $\Theta > 0$, un' *ellisse*, per $\Theta = 0$, una *parabola*.

Inoltre per $\Omega = 0$, un *sistema di due rette divergenti*, essendo la (E) risolubile in due fattori di primo grado; ed infine per $\Omega = 0$ e $\Theta = 0$, un *sistema di due rette parallele o coincidenti*.

Circolo. Pel circolo, dovendo riuscire uguali le due radici della (s) , si avranno le relazioni

$$\begin{aligned} s &= \frac{E_y + E_z - 2E_{yz}}{a^2} = \frac{E_z + E_x - 2E_{zx}}{b^2} = \frac{E_x + E_y - 2E_{xy}}{c^2} \\ &= \frac{E_x + E_{yz} - E_{xy} - E_{zx}}{bc \cos A} = \frac{E_y + E_{zx} - E_{yz} - E_{xx}}{ca \cos B} = \frac{E_z + E_{xy} - E_{zx} - E_{zy}}{ab \cos C}, \end{aligned}$$

dove il valor comune di questi rapporti si può fare uguale ad una quantità arbitraria. Notiamo le conseguenze che si raccolgono da questa proporzionalità quando la (E) prende forme speciali.

1.° Supponiamo

$$0 = E_{yz} = E_{zx} = E_{xy};$$

la (E) rappresenterà una conica *conjugata al triangolo* (a, b, c) ; e perchè possa rappresentare un circolo (fatto $s = \Delta^2$) si dovrà avere

$$\begin{aligned} E_x &= bc \cos A = 2\Delta \cot A, \\ E_y &= ca \cos B = 2\Delta \cot B, \quad S = abc \\ E_z &= ab \cos C = 2\Delta \cot C, \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} l^2 a \cos A \\ m^2 b \cos B \\ n^2 c \cos C \end{array} \right.$$

e la $(E) = 0$, e la $S = s$, diverranno

$$x^2 \cot A + y^2 \cot B + z^2 \cot C = 0,$$

$$l^2 a \cos A + m^2 b \cos B + n^2 c \cos C = \frac{4\Delta^2}{abc}.$$

2.° Supponiamo

$$0 = E_x = E_y = E_z;$$

la (E) rappresenterà una conica *circoscritta al triangolo* (a, b, c) ; e perchè possa rappresentare un circolo (fatto $s = -4\Delta^2$) si dovrà avere

$$2E_{yz} = a^2, \quad 2E_{zx} = b^2, \quad 2E_{xy} = c^2,$$

e le due $(E) = 0$, $S = s$, diverranno

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0,$$

$$amn + bnl + clm = -\frac{4\Delta^2}{abc}.$$

3.° Supponiamo

$$E_{yz} = -\sqrt{E_y E_z}, \quad E_{zx} = -\sqrt{E_z E_x}, \quad E_{xy} = -\sqrt{E_x E_y},$$

e per conseguente

$$E_y + E_z - 2E_{yz} = E_y + E_z + 2\sqrt{E_y E_z} = (\sqrt{E_y} + \sqrt{E_z})^2, \text{ etc. ;}$$

la (E) rappresenterà una *conica inscritta nel triangolo* (a, b, c); e perchè possa rappresentare un *circolo* si dovrà avere

$$\frac{\sqrt{s}}{2\Delta} = \frac{\sqrt{E_y} + \sqrt{E_z}}{a} = \frac{\sqrt{E_z} + \sqrt{E_x}}{b} = \frac{\sqrt{E_x} + \sqrt{E_y}}{c}.$$

Il valor comune di questi rapporti essendo arbitrario, si faccia $= \frac{1}{r}$, intendendo per r il raggio del circolo inscritto; se oltre a ciò si pone

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

si conchiuderà

$$\sqrt{E_x} = \frac{p - a}{r} = \cot \frac{A}{2},$$

$$\sqrt{E_y} = \frac{p - b}{r} = \cot \frac{B}{2},$$

$$\sqrt{E_z} = \frac{p - c}{r} = \cot \frac{C}{2}.$$

E siccome l'equazione della conica inscritta può ridursi alla forma

$$(x\sqrt{E_x})^{\frac{1}{2}} + (y\sqrt{E_y})^{\frac{1}{2}} + (z\sqrt{E_z})^{\frac{1}{2}} = 0,$$

così quella del circolo inscritto potrà scriversi:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{A}{2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{B}{2} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{C}{2} = 0.$$

Dalle cose precedenti si raccoglie che la direzione lmn di una retta qualsivoglia soddisfa sempre alle tre equazioni

$$al + bm + cn = 0,$$

$$amn \div bnl + clm = -\frac{4\Delta^2}{abc},$$

$$l^2a \cos A + m^2b \cos B + n^2c \cos C = \frac{4\Delta^2}{abc}.$$

§ 2.^a Discussione dell'equazione generale di 2.^a grado in coordinate triangolari di una retta mobile.

Siano ξ, η, ζ le coordinate di una retta mobile, cioè le perpendicolari che dai vertici A, B, C del triangolo fondamentale vanno a quella retta sopra cui deve trovarsi la risultante delle $a\xi, b\eta, c\zeta$ esistenti sui lati a, b, c . Ciò

posto, l'equazione $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ omogenea rispetto alle ξ, η, ζ , e che indicherò per F , sia di 2° grado

$$(F) \quad \begin{array}{l} F_x \xi^2 \\ F_y \eta^2 + 2 \\ F_z \zeta^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} F_{yz} \eta \zeta \\ F_{zx} \zeta \xi = 0. \\ F_{xy} \xi \eta \end{array}$$

Il punto ove la retta $= \text{ris.}(a\xi, b\eta, c\zeta)$ tocca la curva F , è dato dall'equazione

$$\frac{dF}{d\xi} \xi' + \frac{dF}{d\eta} \eta' + \frac{dF}{d\zeta} \zeta' = 0.$$

vale a dire, è il *baricentro* de' pesi x, y, z posti ne' vertici A, B, C , e proporzionali alle quantità $\frac{dF}{d\xi}, \frac{dF}{d\eta}, \frac{dF}{d\zeta}$, talchè si può fare

$$\frac{dF}{d\xi} = 2\lambda x, \quad \frac{dF}{d\eta} = 2\lambda y, \quad \frac{dF}{d\zeta} = 2\lambda y,$$

ossia

$$\begin{aligned} F_x \xi + F_{yz} \eta + F_{zx} \zeta &= \lambda x, \\ F_{yz} \xi + F_y \eta + F_{yz} \zeta &= \lambda y, \\ F_{zx} \xi + F_{xy} \eta + F_z \zeta &= \lambda z. \end{aligned}$$

Chiamato σ il comun denominatore delle ξ, η, ζ espresse in funzione delle x, y, z , cioè

$$\sigma = F_x F_y F_z + 2 F_{yz} F_{zx} F_{xy} - F_x F^2_{yz} - F_y F^2_{zx} - F_z F^2_{xy},$$

e fatto

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{d\sigma}{dF_x}, & E_y &= \frac{d\sigma}{dF_y}, & E_z &= \frac{d\sigma}{dF_z}, \\ 2E_{yz} &= \frac{d\sigma}{dF_{yz}}, & 2E_{zx} &= \frac{d\sigma}{dF_{zx}}, & 2E_{xy} &= \frac{d\sigma}{dF_{xy}}, \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned} \sigma \xi &= \lambda (E_x x + E_{xy} y + E_{xz} z), \\ \sigma \eta &= \lambda (E_{yx} x + E_y y + E_{yz} z), \\ \sigma \zeta &= \lambda (E_{zx} x + E_{zy} y + E_z z), \end{aligned}$$

le quali, moltiplicate rispettivamente per x, y, z e sommate, conducono alla formola

$$(E) \quad \begin{array}{l} E_x x^2 \\ E_y y^2 + 2 \\ E_z z^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} F_{yz} yz \\ E_{zx} xz = \frac{\sigma}{\lambda} (x\xi + y\eta + z\zeta), \\ F_{xy} xy \end{array}$$

di cui chiameremo E il primo membro. Ma se invece si moltiplicano per ξ , η , ζ le

$$\frac{dF}{d\xi} = 2\lambda x, \quad \frac{dF}{d\eta} = 2\lambda y, \quad \frac{dF}{d\zeta} = 2\lambda z,$$

e si sommano, viene la formola

$$2\lambda (x\xi + y\eta + z\zeta) = \frac{dF}{d\xi} \xi + \frac{dF}{d\eta} \eta + \frac{dF}{d\zeta} \zeta = 2F = 0.$$

Così rendesi manifesto che le due equazioni $F = 0$, $E = 0$, rappresentano una medesima linea con questo solo divario, che la prima la rappresenta come *inviluppo della retta mobile* = *ris.* $(a\xi, b\eta, c\zeta)$, e la seconda come *luogo del punto mobile* = *bar.* (x, y, z) . Ne segue che la discussione della F riviene a quella già eseguita della E .

N. B. Se risultasse $\omega = 0$, la (F) sarebbe decomponibile in due fattori di 1° grado, e rappresenterebbe non una linea curva ma un sistema di due punti. Qui si fa astrazione da questo caso.

Dalle prime nozioni della teoria de' determinanti si ha che tra il determinante ω delle F_x, F_y ec., ed il determinante Ω ad elementi reciproci E_x, E_y ec., passano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \Omega = \omega^2, \quad \frac{d\Omega}{dE_x} &= \omega F_x, \quad \frac{d\Omega}{dE_y} = \omega F_y, \quad \frac{d\Omega}{dE_z} = \omega F_z, \\ \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dE_{yz}} &= \omega F_{yz}, \quad \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dE_{zx}} = \omega F_{zx}, \quad \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dE_{xy}} = \omega F_{xy}. \end{aligned}$$

Laonde se si fa

$$\begin{aligned} \theta &= F_x + F_y + F_z + 2(F_{yz} + F_{zx} + F_{xy}), \\ \Theta &= \frac{d\Omega}{dE_x} + \frac{d\Omega}{dE_y} + \frac{d\Omega}{dE_z} + \frac{d\Omega}{dE_{yz}} + \frac{d\Omega}{dE_{zx}} + \frac{d\Omega}{dE_{xy}}, \end{aligned}$$

sarà $\Theta = \omega\theta$.

Le coordinate del centro $\alpha\beta\gamma$ si avranno da

$$\theta\alpha = 2\Delta(F_x + F_{xy} + F_{yz}), \quad \theta\beta = 2\Delta(F_y + F_{yz} + F_{zx}), \quad \theta\gamma = 2\Delta(F_z + F_{zx} + F_{xy}).$$

Intorno al centro $\alpha\beta\gamma$ s'immagini il raggio r che colla direzione lmn segua il punto M descrivente la linea (F). L'equazione tra r e la direzione lmn

$$\left(sr^2 + 4\Delta^2 \frac{\Omega}{\Theta} = 0 \right) \text{ riducesi a}$$

$$sr^2 + 4\Delta^2 \frac{\omega}{\theta} = 0.$$

L'ultimo termine dell'equazione (s) = 0 essendo $4\Delta^2\Theta = 4\Delta^2\omega\theta$, la linea (F) sarà

per $\omega\theta > 0$, un' *ellisse*;
per $\omega\theta < 0$, un' *iperbola*; per $\theta = 0$, una *parabola*.

Le condizioni perchè la (F) rappresenti un circolo, fatte le sostituzioni nelle formole trovate più sopra, sono

$$\frac{(F_y + F_z - 2F_{yz})F_x - (F_{xy} - F_{xz})^2}{a^2} = \frac{(F_x + F_z - 2F_{xz})F_y - (F_{yz} - F_{xy})^2}{b^2} = ec.$$

$$= \frac{(F_y + F_{xy})(F_x + F_{xz}) - (F_x + F_{yz} + F_{zx} + F_{zy})}{bc \cos A} = ec. = \frac{s}{4\Delta^2} = -\frac{a}{\theta} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Le direzioni principali lmn si hanno da

$$\frac{d(s)}{ds} l^2 = s - \frac{4\Delta^2}{a^2} \left[(F_y + F_z - 2F_{yz})F_x - (F_{xy} - F_{xz})^2 \right], \text{ ec.}$$

$$\frac{d(s)}{ds} mn = \frac{4\Delta^2}{bc} \left[(F_y + F_{xy})(F_x + F_{xz}) - (F_x + F_{yz} + F_{zx} + F_{zy})F_{yz} \right] - s \cos A, \text{ ec.}$$

ARTICOLO V.

§ 1.° Discussione dell'equazione generale di 2.° grado in coordinate tetraedriche di punti.

Supponiamo che l'equazione

$$E(x, y, z, t) = 0,$$

omogenea in coordinate tetraedriche di un punto corrente $xyzt$, sia la più generale di 2.° grado

$$(E) \quad \begin{cases} E_x x^2 + E_y y^2 + E_z z^2 + E_t t^2 \\ + 2(E_{yz}yz + E_{zx}zx + E_{xy}xy) \\ + 2(E_{xt}xt + E_{yt}yt + E_{zt}zt) = 0 \end{cases}$$

ove uno de' dieci coefficienti E_x, E_y ec. si può ad arbitrio riguardar come dato. Quest'equazione, senza perdere in nulla la sua generalità, può eziandio essere scritta sotto la forma

$$(E)_1 \quad \begin{cases} (a_1x + b_1y + c_1z + d_1t)(x + y + z + t) \\ - (a'y z + b'z x + c'x y) \\ - (a'xt + b'yt + c'zt) = 0, \end{cases}$$

nella quale entrano dieci coefficienti indeterminati, e di più il fattore costante

$$x + y + z + t = 3V.$$

Infatti dalla $(E)_1$ si passa alla (E) ponendo

$$E_x = a_1, \quad E_y = b_1, \quad E_z = c_1, \quad E_t = d_1;$$

$$2E_{yz} = b_1 + c_1 - a', \text{ ec.}; \quad 2E_{xt} = a_1 + d_1 - a'', \text{ ec.};$$

e viceversa, si passa dalla (E) alla $(E)_1$ ponendo

$$a_1 = E_x, \text{ ec.}; \quad a' = E_y + E_x - 2E_{yz} \text{ ec.}; \quad a'' = E_x + E_t - 2E_{xt}, \text{ ec.}$$

Supponendo che gli assi Ox , Oy , Oz , Ot siano perpendicolari alle facce a , b , c , d del tetraedro fondamentale, in quel modo che sopra si è dichiarato, quando la superficie rappresentata dalla (E) si vuole riferire a tre di questi assi, per esempio ad Ox , Oy , Oz , basta porre l'origine O nel vertice D di esso tetraedro $ABCD$, e poi sostituire in (E)

$$t = -x - y - z + 3V;$$

e la (E) diverrà

$$(E)_t \quad \begin{vmatrix} Ax^2 & A'yz & A''x \\ By^2 + 2 & B'xz - 2 & B'y + D = 0, \\ Cx^2 & C'xy & C'z \end{vmatrix}$$

fatto

$$\begin{cases} A = E_t + E_x - 2E_{xt}, \\ B = E_t + E_y - 2E_{yt}, \\ C = E_t + E_z - 2E_{zt}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A' = E_t + E_{yz} - E_{ty} - E_{tz}, \\ B' = E_t + E_{zx} - E_{tx} - E_{tz}, \\ C' = E_t + E_{xy} - E_{tx} - E_{ty}; \end{cases}$$

$$A'' = 3V(E_t - E_{tx}), \quad B'' = 3V(E_t - E_{ty}), \quad C'' = 3V(E_t - E_{tz});$$

$$D = 9V^2 E_t.$$

Della superficie rappresentata dall'equazione (E) si tratti ora di cercare i piani diametrali, il centro, la direzione ed il valore de' raggi principali, ed i criterii per conoscerne la specie e la varietà.

Nella (E) sostituendo

$$x = alr + \alpha, \quad y = bmr + \beta, \quad z = cnr + \gamma, \quad t = dpr + \delta,$$

si ottiene

$$(r) \quad Sr^2 + 2Tr + U = 0,$$

dove i coefficienti estremi U ed S sono ciò che diviene il polinomio di secondo grado

$$E(x, y, z, t)$$

allorchè alle coordinate x, y, z, t si sostituiscono successivamente le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, e le al, bm, cn, dp , cioè

$$S = E(al, bm, cn, dp), \quad U = E(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Il coefficiente medio $2T$ è legato ai coefficienti estremi colle formole

$$2T = \frac{dS}{dl} \frac{\alpha}{a} + \frac{dS}{dm} \frac{\beta}{b} + \frac{dS}{dn} \frac{\gamma}{c} + \frac{dS}{dp} \frac{\delta}{d},$$

$$2T = \frac{dU}{da} al + \frac{dU}{db} bm + \frac{dU}{dc} cn + \frac{dU}{dp} dp.$$

I coefficienti S ed U essendo omogenei l'uno rispetto ad l, m, n, p , e l'altro rispetto ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, danno luogo alle identità

$$2S = \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m + \frac{dS}{dn} n + \frac{dS}{dp} p$$

$$2U = \frac{dU}{d\alpha} \alpha + \frac{dU}{d\beta} \beta + \frac{dU}{d\gamma} \gamma + \frac{dU}{d\delta} \delta.$$

Al piano *polare* di un punto si può applicare ciò che si è detto intorno alla retta polare.

PIANI DIAMETRALI. In $Sr^2 + 2Tr + U = 0$ facciasi $= 0$ il coefficiente medio $2T$, e supposta costante la direzione $lmnp$, rendasi corrente il punto $\alpha\beta\gamma\delta$ sì in T e sì in U , e però alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s'intendano sostituite le x, y, z, t . L'equazione $2T = 0$, ossia

$$(T) \quad \frac{dS}{dt} \cdot \frac{x}{a} + \frac{dS}{dm} \cdot \frac{y}{b} + \frac{dS}{dn} \cdot \frac{z}{c} + \frac{dS}{dp} \cdot \frac{t}{d} = 0$$

rappresenterà il piano *diametrale* coniugato alla direzione $lmnp$, cioè il piano che passa per i punti di mezzo $xyzt$ di quel sistema di corde parallele $2r$ che hanno la direzione $lmnp$, e di cui i valori (per ogni punto di mezzo $xyzt$) sono dati dall'equazione

$$Sr^2 + U = 0.$$

Un piano *diametrale* si dice *principale* quando dimezza ad angolo retto le corde parallele alle quali è coniugato.

Chiamata $2s$ l'area che sopra le facce (a, b, c, d) del tetraedro fondamentale ha per aree componenti

$$\frac{dS}{dl}, \frac{dS}{dm}, \frac{dS}{dn}, \frac{dS}{dp},$$

la posizione del piano *diametrale* T sarà determinata da ciò che questo piano dee avere sopra di sè l'area

$$2s = \text{ris.} \left(\frac{dS}{dl}, \frac{dS}{dm}, \frac{dS}{dn}, \frac{dS}{dp} \right).$$

Alle aree s'intendano adesso sostituiti gli assi che le rappresentano, cosicchè $2s$ diventi una retta perpendicolare al piano T , e le sue componenti $\frac{dS}{dl}, \frac{dS}{dm}$ ec. divengano segmenti degli assi Ox, Oy, Oz, Ot , perpendicolari alle facce a, b, c, d .

Essendo retto l'angolo $(Ts) = (Tr + rs)$, l'angolo (Tr) che il piano T fa colle corde $2r$ ad esso coniugate, si avrà dall'equazione

$$2s \sin(Tr) = \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m + \frac{dS}{dn} n + \frac{dS}{dp} p = 2S,$$

ed allorchè il piano diametrale è principale, sarà

$$\text{sen}(Tr) = 1, \quad s = S.$$

Inoltre una direzione $l'm'n'p'$ parallela al piano T , siccome perpendicolare alla retta $2s$, soddisfarà all'equazione

$$\frac{dS}{dl} l' + \frac{dS}{dm} m' + \frac{dS}{dn} n' + \frac{dS}{dp} p' = 0.$$

DIREZIONI CONJUGATE. Due direzioni $lmnp$, $l'm'n'p'$ si dicono CONJUGATE tra loro se soddisfacciano all'equazione

$$\frac{dS}{dl} l' + \frac{dS}{dm} m' + \frac{dS}{dn} n' + \frac{dS}{dp} p' = 0,$$

vale a dire, se il piano diametrale che è conjugato all'una delle due direzioni, riesca parallelo all'altra, e viceversa.

CENTRO. Supponiamo che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ siano le coordinate del centro della superficie (E), cioè del punto ove restano dimezzate tutte le corde $2r$ che vi passano. L'equazione (r) dovrà ridursi alla forma $Sr^2 + U = 0$, e però il coefficiente medio $2T$ dovrà risultare $= 0$, od essere

$$\frac{dU}{d\alpha} \alpha + \frac{dU}{d\beta} \beta + \frac{dU}{d\gamma} \gamma + \frac{dU}{d\delta} \delta = 0$$

qualunque sia la direzione $lmnp$ del raggio r girato intorno al centro $\alpha\beta\gamma\delta$. E poichè la direzione $lmnp$ deve, nel suo mutarsi, verificar sempre l'equazione

$$\alpha l + \beta m + \gamma n + \delta p = 0,$$

per eliminare dalle due equazioni uno de' quattro elementi l, m, n, p , per esempio l , si moltiplichi la seconda per 2λ e poi si sottragga dalla prima. Si avrà

$$\left(\frac{dU}{d\alpha} - 2\lambda\right) \alpha + \left(\frac{dU}{d\beta} - 2\lambda\right) \beta + \left(\frac{dU}{d\gamma} - 2\lambda\right) \gamma + \left(\frac{dU}{d\delta} - 2\lambda\right) \delta = 0,$$

nella quale i coefficienti di l, m, n, p si dovranno fare uguali a zero tutti e quattro; il primo perchè si vuole eliminare l , e ciascuno degli altri tre m, n, p perchè l'equazione dee verificarsi anche quando due di essi, per es. n e p , vanno simultaneamente a zero. Le coordinate $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ del centro debbono dunque ricavarli dalle

$$\frac{dU}{d\alpha} = 2\lambda, \quad \frac{dU}{d\beta} = 2\lambda, \quad \frac{dU}{d\gamma} = 2\lambda, \quad \frac{dU}{d\delta} = 2\lambda,$$

ossia dalle seguenti

$$(1) \quad \begin{cases} E_{xx}\alpha + E_{xy}\beta + E_{xz}\gamma + E_{xt}\delta = \lambda, \\ E_{yx}\alpha + E_{yy}\beta + E_{yz}\gamma + E_{yt}\delta = \lambda, \\ E_{zx}\alpha + E_{zy}\beta + E_{zz}\gamma + E_{zt}\delta = \lambda, \\ E_{tx}\alpha + E_{ty}\beta + E_{tz}\gamma + E_{tt}\delta = \lambda. \end{cases}$$

Per risolvere quest'equazioni si dinoti per Ω il denominator comune delle incognite, ossia il determinante

$$\Omega = E_x (E_y E_z E_t + 2 E_{yz} E_{yt} E_{zt} - E_y E_{zt}^2 - E_z E_{yt}^2 - E_t E_{yz}^2) \\ - \begin{vmatrix} (E_z E_t - E_{zt}^2) E_{xy}^2 \\ (E_t E_y - E_{ty}^2) E_{xz}^2 + 2 \\ (E_y E_z - E_{yz}^2) E_{xt}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (E_y E_{zt} - E_{yz} E_{yt}) E_{xz} E_{xt} \\ (E_z E_{ty} - E_{zt} E_{zy}) E_{xt} E_{yz} \\ (E_t E_{yz} - E_{ty} E_{tz}) E_{xy} E_{xz} \end{vmatrix}$$

$$\text{sarà } \frac{d\Omega}{dE_x} = E_y E_z E_t + 2 E_{yz} E_{yt} E_{zt} - E_y E_{zt}^2 - E_z E_{yt}^2 - E_t E_{yz}^2, \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dE_{xy}} = - (E_z E_t - E_{zt}^2) E_{xy} + \begin{vmatrix} (E_z E_{yt} - E_{zy} E_{zt}) E_{xt} \\ (E_t E_{yz} - E_{ty} E_{tz}) E_{xz} \end{vmatrix}, \text{ ec.}$$

E le (1) risolte somministrano

$$\Omega \alpha = \lambda \left[\frac{d\Omega}{dE_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dE_{xy}} + \frac{d\Omega}{dE_{xz}} + \frac{d\Omega}{dE_{xt}} \right) \right], \\ \Omega \beta = \lambda \left[\frac{d\Omega}{dE_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dE_{yz}} + \frac{d\Omega}{dE_{yt}} + \frac{d\Omega}{dE_{xt}} \right) \right], \\ \Omega \gamma = \lambda \left[\frac{d\Omega}{dE_z} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dE_{xz}} + \frac{d\Omega}{dE_{zy}} + \frac{d\Omega}{dE_{xt}} \right) \right], \\ \Omega \delta = \lambda \left[\frac{d\Omega}{dE_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dE_{tz}} + \frac{d\Omega}{dE_{ty}} + \frac{d\Omega}{dE_{xz}} \right) \right];$$

e da queste, in grazia di $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3V$, si raccoglie

$$\lambda = 3V \frac{\Omega}{\Theta},$$

$$\text{fatto } \Theta = \frac{d\Omega}{dE_x} + \frac{d\Omega}{dE_y} + \frac{d\Omega}{dE_z} + \frac{d\Omega}{dE_t} \\ + \frac{d\Omega}{dE_{yz}} + \frac{d\Omega}{dE_{zx}} + \frac{d\Omega}{dE_{xy}} + \frac{d\Omega}{dE_{xt}} + \frac{d\Omega}{dE_{yt}} + \frac{d\Omega}{dE_{zt}}.$$

Così le coordinate del centro sono espresse da frazioni algebriche il cui denominator comune è Θ . Ma se per determinare il centro, la (E) si fosse dapprima scritta sotto la forma $(E)_t$, il denominator comune di α , β , γ si sarebbe trovato

$$ABC + 2A'B'C' - \lambda A'^2 - BB'^2 - CC'^2.$$

Questi due denominatori essendo della stessa dimensione rispetto ai coefficienti E_x ec., debbono certamente essere identici:

$$ABC + 2A'B'C' - \lambda A'^2 - BB'^2 - CC'^2 = \Theta.$$

Il primo membro di questa identità avrà dunque la proprietà di mantenersi identico a sè stesso qualunque sia la combinazione ternaria che si scelga de' quattro assi Ox, Oy, Oz, Ot .

Se le (24) si moltiplicano rispettivamente per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, e si sommano, risulta

$$U = 9\gamma^2 \frac{\Omega}{\Theta}, \text{ donde } Sr^2 + 9\gamma^2 \frac{\Omega}{\Theta} = 0.$$

Di qui apparisce: 1.^o Che se il raggio vettore r gira intorno al centro $afy\delta$ mutando direzione e lunghezza, il prodotto Sr^2 non varia benchè vari ciascuno de' suoi fattori S, r^2 , e per conseguenza quando l'uno di questi è massimo, l'altro sarà minimo, e viceversa; 2.^o Che quando risulta $\Omega = 0$ e Θ diverso da zero, l'equazione $Sr^2 = 0$, e però la (E) rappresenterà un cono; 3.^o Che se, oltre $\Omega = 0$, riesca pure $\Theta = 0$, allora il cono si aprirà o in un cilindro, o in due piani.

Il coefficiente S , sostituendo in esso

$$dp = -(al + bm + cn),$$

riveste la forma

$$S = \begin{array}{l|l} Aa^2l^2 & B'canl \\ Bb^2m^2 + 2 & A'bcnm \\ Cc^2n^2 & C'ablm \end{array}$$

funzione omogenea de' tre elementi l, m, n che bastano a determinare la direzione di r , e dove A, B ec. hanno il significato riportato di sopra. Ciò posto, le formole relative al piano diametrale, alle direzioni conjugate $lmn, l'm'n'$, ed all'angolo (Tr) che il piano diametrale fa colle corde conjugate, diventano

$$\frac{dS}{dl} \frac{x}{a} + \frac{dS}{dm} \frac{y}{b} + \frac{dS}{dn} \frac{z}{c} = A'l + B'm + C'n,$$

$$\frac{dS}{dl} l' + \frac{dS}{dm} m' + \frac{dS}{dn} n' = 0,$$

$$2s \operatorname{sen}(Tr) = \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m + \frac{dS}{dn} n;$$

essendo $2s = \operatorname{ris.}\left(\frac{dS}{dl}, \frac{dS}{dm}, \frac{dS}{dn}\right)$; e quando il piano diametrale è principale si ha $\operatorname{sen}(Tr) = 1$, e

$$2s = \frac{dS}{dl} l + \frac{dS}{dm} m + \frac{dS}{dn} n = 2S.$$

DIREZIONI PRINCIPALI. Le direzioni lmn che intorno al centro afy rendono massimo o minimo il raggio vettore r si dicono *direzioni principali*.

La direzione lmn , che dee sempre verificar l' equazione

$$(H) \quad \begin{array}{l} l^2 \operatorname{sen}^2(yz) \\ H^2 = m^2 \operatorname{sen}^2(xz) - 2 \\ n^2 \operatorname{sen}^2(xy) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} mn \operatorname{sen}(xz) \operatorname{sen}(xy) \cos x \\ nl \operatorname{sen}(xy) \operatorname{sen}(yz) \cos y \\ lm \operatorname{sen}(yz) \operatorname{sen}(xz) \cos z, \end{array} \right.$$

quando divien principale dovrà di più rendere un massimo od un minimo la quantità S e però soddisfare a $dS = 0$. Le direzioni principali debbono adunque inferirsi dall' equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dl} dl + \frac{dS}{dm} dm + \frac{dS}{dn} dn &= 0, \\ \operatorname{sen}(yz)[l \operatorname{sen}(yz) - m \operatorname{sen}(xz) \cos z - n \operatorname{sen}(xy) \cos y] dl \\ + \operatorname{sen}(xz)[m \operatorname{sen}(xz) - n \operatorname{sen}(xy) \cos x - l \operatorname{sen}(yz) \cos z] dm \\ + \operatorname{sen}(xy)[n \operatorname{sen}(xy) - l \operatorname{sen}(yz) \cos y - m \operatorname{sen}(xz) \cos x] dn &= 0. \end{aligned}$$

Ora, per la teoria de' massimi e de' minimi, i coefficienti di dl , dm , dn nelle due equazioni debbono essere rispettivamente proporzionali; ed il loro rappor-

to sarà $= \frac{2S}{H^2}$, rapporto che è quello della somma de' termini antecedenti

alla somma de' conseguenti dopo aver moltiplicato sì gli uni che gli altri termini rispettivamente per l , m , n . Ma nella 1.^a equazione i coefficienti di dl , dm , dn sono (sugli assi Ox , Oy , Oz) le componenti della retta $2s$ perpendicolare al piano diametrale (T), e nella 2.^a equazione sono le componenti omologhe di una retta $= H^2$, ed avente la direzione lmn conjugata a tale piano. Queste due rette sono adunque parallele, e però il piano (T) è un piano principale, e si ha $\operatorname{sen}(Tr) = 1$ ed $s = S$. E siccome il piano (T) incide nella superficie (E) una sezione conica che ha due direzioni conjugate ad angolo retto, così possiamo ritenere che nelle superficie di 2.^o ordine le direzioni principali sono tre, conjugate tra loro ad angolo retto.

Avendosi inoltre

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dl} = Aa^2l + C'abm + B'can,$$

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dm} = Bb^2m + A'bcn + C'abl,$$

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dn} = Cc^2n + B'cal + A'bcm,$$

se queste relazioni si sostituiscono nella proporzione accennata, la quale significa che la retta $2s$ e la direzione lmn sono entrambe perpendicolari al piano (T), avremo tra le quantità l , m , n , s , oltre l' equazione (H) le tre seguenti

$$Ll - N'm - M'n = 0,$$

$$Mm - L'n - N'l = 0,$$

$$Nn - M'l - L'm = 0,$$

ove per abbreviare si è posto

$$\begin{cases} L = s \operatorname{sen}^2(yz) - Aa^2H^2, \\ M = s \operatorname{sen}^2(zx) - Bb^2H^2, \\ N = s \operatorname{sen}^2(xy) - Cc^2H^2; \end{cases} \quad \begin{cases} L' = s \operatorname{sen}(xz) \operatorname{sen}(xy) \cos x + A'H^2bc, \\ M' = s \operatorname{sen}(xy) \operatorname{sen}(yz) \cos y + B'H^2ca, \\ N' = s \operatorname{sen}(yz) \operatorname{sen}(zx) \cos z + C'H^2ab. \end{cases}$$

Eliminando l , m , n si ottiene

$$(a) \quad LMN - 2L'M'N' - LL'^2 - MM'^2 - NN'^2 = 0.$$

Per sviluppare quest'equazione e ridurla alla forma più semplice, conviene richiamare, oltre la formola

$$\operatorname{sen} y \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(yz) = \sqrt{[1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z - 2 \cos x \cos y \cos z]},$$

le altre relazioni tra le varie parti del tetraedro $ABCD$. Pertanto fatto

$$\begin{aligned} DA = f, \quad DB = g, \quad DC = h, \\ BC = f_1, \quad CA = g_1, \quad AB = h_1, \end{aligned}$$

se nell'interno del tetraedro gli angoli diedri s' intendono segnati, sotto le linee trigonometriche, co' loro spigoli f , g , h , f_1 , g_1 , h_1 , avremo tra gli angoli supplementari

$$\begin{aligned} \cos(yz) &= -\cos f, & \cos(tx) &= -\cos f_1, & \cos x &= -\cos(gh), \\ \cos(zx) &= -\cos g, & \cos(ry) &= -\cos g_1, & \cos y &= -\cos(hf), \\ \cos(xy) &= -\cos h, & \cos(tz) &= -\cos h_1, & \cos z &= -\cos(fg); \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(xy) = \operatorname{sen}(gh) \operatorname{sen}(hf) \operatorname{sen} h = \frac{6V}{fgh}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} 2a &= gh \operatorname{sen} x, & 2bc \operatorname{sen}(yz) &= 3Vf, \\ 2b &= hf \operatorname{sen} y, & 2ca \operatorname{sen}(zx) &= 3Vg, & Habc &= \frac{9}{2} V^2, \\ 2c &= fg \operatorname{sen} z, & 2ab \operatorname{sen}(xy) &= 3Vh, \\ 4a^2bc \operatorname{sen}(zx) \operatorname{sen}(xy) &= 9V^2gh, \text{ ec.} \end{aligned}$$

Ponendo mente a questi rapporti, l'equazione (a) cubica in s , sviluppata e divisa per H^4 , si offrirà sotto la forma

$$(s) \quad s^3 - \frac{3}{2} VP s^2 + \frac{9}{4} V^2 Q s - \frac{9}{4} V^4 \Theta = 0,$$

dove

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} Aa^2 \\ \frac{3}{2} VP = Bb^2 - 2 \\ Cc^2 \end{array} \left| \begin{array}{c} A'bc \cos f \\ B'ca \cos g \\ C'ab \cos h, \end{array} \right. \\ Q &= (BC - A'^2)f^2 \left| \begin{array}{c} (B'C' - AA')gh \cos(gh) \\ (C'A' - BB')hf \cos(hf) \\ (A'B' - CC')fg \cos(fg). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si ottiene un ulteriore sviluppo di P sostituendo i valori di A, B, C, A', B', C' , e tenendo conto delle relazioni

$$a^2 = a(b \cos h + c \cos g + d \cos f_1),$$

$$b^2 = b(c \cos f + a \cos h + d \cos g_1),$$

$$c^2 = c(a \cos g + b \cos f + d \cos h_1),$$

$$bc \cos f = \frac{3}{2} \sqrt{f} \cot f, \text{ ec.}$$

Si trova

$$P = \begin{vmatrix} (E_y + E_x - 2E_{yz}) f \cot f & (E_t + E_x - 2E_{tx}) f_1 \cot f_1 \\ (E_x + E_x - 2E_{tx}) g \cot g & (E_t + E_y - 2E_{ty}) g_1 \cot g_1 \\ (E_x + E_y - 2E_{xy}) h \cot h & (E_t + E_z - 2E_{tz}) h_1 \cot h_1 \end{vmatrix}$$

Similmente si ottiene un ulteriore sviluppo di Q tenendo conto delle relazioni

$$2gh \cos(gh) = g^2 + h^2 - f_1^2, \quad 2hf \cos(hf) = h^2 + f^2 - g_1^2, \text{ ec.}$$

Si trova

$$Q = R_{tx} f^2 + R_{ty} g^2 + R_{tz} h^2 + R_{yz} f_1^2 + R_{zx} g_1^2 + R_{xy} h_1^2,$$

dove $R_{yz} = AA' - B'C', \quad R_{zx} = BB' - C'A', \quad R_{xy} = CC' - A'B',$

$$R_{tx} = BC - BB' - CC' + A'(B' + C' - A'), \quad R_{ty} = \text{ec.}$$

I coefficienti R_{tx}, R_{ty}, R_{tz} si possono esprimere sotto una forma simile a quella de' coefficienti R_{yz}, R_{zx}, R_{xy} per mezzo della seguente considerazione. I quattro assi (Ox, Oy, Oz, Ot) s' intendano distribuiti, con ordine circolare, ne' quattro sistemi ternari:

$$(Ox, Oy, Oz), (Oy, Oz, Ot), (Oz, Ot, Ox), (Ot, Ox, Oy)$$

a ciascuno de' quali si può indifferentemente riferire la superficie (E) . Una formola qualsivoglia tra le A, B, C, A', B', C' relativa ad uno qualunque di questi sistemi si cangerà evidentemente in quella relativa al sistema che segue, solchè si faccia subire agli indici x, y, z, t de' coefficienti E una permutazione circolare. Così se convengasi di apporre a piè delle lettere A, B, C, A' ec., o de' loro aggregati, la lettera di quello tra gli assi (Ox, Oy, Oz, Ot) che non entra nel sistema ternario a cui è riportata la superficie, ciascuno de' binomi $AA' - B'C', BB' - C'A', CC' - A'B'$, per es. il primo, s' intenderà riferito al 1°, 2°, 3°, 4° sistema ternario di assi, scrivendo rispettivamente

$$(AA' - B'C')_t, \quad (AA' - B'C')_x, \quad (AA' - B'C')_y, \quad (AA' - B'C')_z.$$

Ciò convenuto, avremo in generale

$$\begin{aligned} R_{yz} &= (AA' - B'C')_t, & R_{zx} &= (BB' - C'A')_t, & R_{xy} &= (CC' - A'B')_t, \\ R_{xt} &= (AA' - B'C')_x, & R_{ty} &= (BB' - C'A')_x, & R_{yz} &= (CC' - A'B')_x, \\ R_{tw} &= (AA' - B'C')_y, & R_{xz} &= (BB' - C'A')_y, & R_{xt} &= (CC' - A'B')_y, \\ R_{zy} &= (AA' - B'C')_z, & R_{yt} &= (BB' - C'A')_z, & R_{tx} &= (CC' - A'B')_z. \end{aligned}$$

Di qui le identità

$$(AA' - BC)_i = (CC' - A'B)_i, \text{ ec.}$$

I RAGGI PRINCIPALI si avranno dalla (r) sostituendo s ad S , ed intendendo per s una qualunque delle radici dell'equazione cubica (s). In tale ipotesi si ha

$$(r)_1 \quad sr^3 + 9V^2 \frac{\Omega}{\Theta} = 0;$$

e se nella (s) si sostituisce $s = -9V^2 \frac{\Omega}{\Theta} \frac{1}{r^3}$, si ottiene

$$(r)_2 \quad r^6 + Q \frac{\Omega}{\Theta^2} r^4 + 6VP \frac{\Omega^2}{\Theta^3} r^2 + 36V^2 \frac{\Omega^3}{\Theta^4} = 0,$$

formola pienamente conforme a quella già trovata con altro metodo dal ch. prof. G. BATTAGLINI, che di essa e dell'analogia per le coniche ha fatto assai belle ed ingegnose applicazioni (Vedi il *Rendiconto dell'Acc. Napolitana* di scienze fisiche e matematiche, Maggio e Giugno 1862).

FORMOLE PER LE DIREZIONI PRINCIPALI. Il polinomio che costituisce il 1° membro dell'equazione cubica in s e che sarà indicato per (s), quando si voglia riguardare come

$$= \frac{LMN - 2L'M'N' - LL'^2 - MM'^2 - NN'^2}{H^4},$$

ossia come funzione di L, M, N, L', M', N' , verrà richiamato col simbolo (σ). Per questa convenzione, oltre (σ) = (s), si avrà

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma)}{dL} &= \frac{MN - L'^2}{H^4}, & \frac{d(\sigma)}{dM} &= \frac{NL - M'^2}{H^4}, & \frac{d(\sigma)}{dN} &= \frac{LM - N'^2}{H^4}, \\ -\frac{1}{2} \frac{d(\sigma)}{dL'} &= \frac{M'N' + LL'}{H^4}, & -\frac{1}{2} \frac{d(\sigma)}{dM'} &= \frac{N'L' + MM'}{H^4}, & -\frac{1}{2} \frac{d(\sigma)}{dN'} &= \frac{L'M' + NN'}{H^4}; \end{aligned}$$

e di più le identità

$$\frac{L}{H^4}(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{dM} \frac{d(\sigma)}{dN} - \frac{1}{4} \left(\frac{d(\sigma)}{dL'} \right)^2,$$

$$\frac{M}{H^4}(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{dN} \frac{d(\sigma)}{dL} - \frac{1}{4} \left(\frac{d(\sigma)}{dM'} \right)^2,$$

$$\frac{N}{H^4}(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{dL} \frac{d(\sigma)}{dM} - \frac{1}{4} \left(\frac{d(\sigma)}{dN'} \right)^2;$$

$$\frac{d(\sigma)}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{d(\sigma)}{dL} \operatorname{sen}^2(yz) \\ \frac{d(\sigma)}{dM} \operatorname{sen}^2(zx) \\ \frac{d(\sigma)}{dN} \operatorname{sen}^2(xy) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{d(\sigma)}{dL'} \operatorname{sen}(xz) \operatorname{sen}(xy) \cos x \\ \frac{d(\sigma)}{dM'} \operatorname{sen}(xy) \operatorname{sen}(yz) \cos y \\ \frac{d(\sigma)}{dN'} \operatorname{sen}(yz) \operatorname{sen}(xz) \cos z. \end{vmatrix}$$

Ciò posto, dalle ultime due delle tre equazioni

$$Ll - M'n - N'm = 0, \quad Mm - N'l - L'n = 0, \quad Nn - L'm - M'l = 0,$$

si ricava la 1^a di quelle che seguono, e da essa per ragion di simmetria le altre due

$$-2 \frac{d(\sigma)}{dL} l^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dN'} m^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dM'} n^{-1},$$

$$-2 \frac{d(\sigma)}{dM} m^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dL'} n^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dN'} l^{-1},$$

$$-2 \frac{d(\sigma)}{dN} n^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dM'} l^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dL'} m^{-1},$$

le quali, moltiplicate rispettivamente per l^{-1} , m^{-1} , n^{-1} , offrono

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma)}{dL} l^{-2} &= \frac{d(\sigma)}{dM} m^{-2} = \frac{d(\sigma)}{dN} n^{-2} = \\ &= \frac{d(\sigma)}{dL'} \frac{(mn)^{-1}}{-2} = \frac{d(\sigma)}{dM'} \frac{(nl)^{-1}}{-2} = \frac{d(\sigma)}{dN'} \frac{(lm)^{-1}}{-2}. \end{aligned}$$

Se in questa proporzionalità gli antecedenti e i conseguenti si moltiplicano rispettivamente per i coefficienti di $\frac{d(\sigma)}{dL}$, $\frac{d(\sigma)}{dM}$, ec. che si vedono nell'espressione di $\frac{d(\sigma)}{ds}$, e poi si sommano; il rapporto delle due somme sarà $= \frac{d(\sigma)}{ds} : H^2$. Dunque

$$\frac{d(s)}{ds} l^2 = \frac{d(\sigma)}{dL} H^2 = \frac{MN - L'^2}{H^2}, \quad \frac{d(s)}{ds} m^2 = \text{ec.}$$

$$\frac{d(s)}{ds} mn = -\frac{1}{2} \frac{d(\sigma)}{dL'} H^2 = \frac{M'N' + LL'}{H^2}, \quad \frac{d(s)}{ds} nl = \text{ec.}$$

Per ognuna delle radici s_1, s_2, s_3 della (s) queste formole daranno gli elementi (l, m, n, p) della corrispondente direzione principale e quanto alla grandezza e quanto al segno (± 1).

Limiti delle radici di (s) = 0. Poichè

$$L = s \operatorname{sen}^2(yz) - AH^2a^2,$$

$$M = s \operatorname{sen}^2(zx) - BH^2b^2,$$

$$N' = s \operatorname{sen}(yz) \operatorname{sen}(zx) \cos z + C'H^2ab,$$

ed

$$\frac{H^2a^2}{\operatorname{sen}^2(yz)} = \frac{9V^2}{f^2}, \quad \frac{H^2b^2}{\operatorname{sen}^2(zx)} = \frac{9V^2}{g^2}, \quad \frac{H^2ab}{\operatorname{sen}(yz) \operatorname{sen}(zx)} = \frac{9V^2}{fg},$$

sarà

$$\frac{LM - N'^2}{\operatorname{sen}^2(yz) \operatorname{sen}^2(zx)} = \left(s - 9V^2 \frac{A}{f^2}\right) \left(s - 9V^2 \frac{B}{g^2}\right) - \left(s \cos z + 9V^2 \frac{C'}{fg}\right)^2.$$

I limiti delle radici di $(s) = 0$ si deducono direttamente dalle identità di cui è tipo la

$$(1) \quad \frac{L}{H^4}(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{dM} \frac{d(\sigma)}{dN} - \frac{1}{4} \left(\frac{d(\sigma)}{dL} \right)^2$$

dove (σ) equivale al polinomio (s) . A questo fine supponiamo disposte per ordine di grandezza le quantità $\frac{A}{f^2} < \frac{B}{g^2}$, e segnate per $\sigma' < \sigma''$ le radici di $\frac{d(\sigma)}{dN} = 0$, ossia di

$$LM - N'^2 = 0,$$

queste due radici saranno separate (come si è dichiarato nelle coniche) per la gradazione

$$\frac{\sigma'}{9V^2} < \frac{A}{f^2} < \frac{B}{g^2} < \frac{\sigma''}{9V^2}.$$

Le quantità reali σ' , σ'' non potranno adunque risultare uguali se non quando si abbia $L = 0$, $M = 0$, $N' = 0$, ossia

$$\frac{\sigma'}{9V^2} = \frac{A}{f^2} = \frac{B}{g^2} = \frac{C'}{fg \cos(fg)}.$$

La quantità L quando vi si fa successivamente $s = \sigma'$, $s = \sigma''$, divenga in corrispondenza L_1 , L_2 . Sarà

$$L_1 < 0, \quad L_2 > 0.$$

Se ora consideriamo che per $s = \sigma'$, $s = \sigma''$, la (1) fornisce

$$\frac{L_1}{H^4}(\sigma') = -\frac{1}{4} \left(\frac{d(\sigma')}{dL} \right)^2, \quad \frac{L_2}{H^4}(\sigma'') = -\frac{1}{4} \left(\frac{d(\sigma'')}{dL} \right)^2,$$

si dovrà concludere $(\sigma') > 0$, $(\sigma'') < 0$. Ne consegue che se nel polinomio (σ) od (s) si fa successivamente

$$s = -\infty, \quad s = \sigma', \quad s = \sigma'', \quad s = \infty,$$

i risultati della sostituzione offriranno i segni

$$-, +, -, +.$$

Dunque le tre radici s_1 , s_2 , s_3 dell'equazione cubica $(s) = 0$ saranno separate per la gradazione

$$s_1 < \sigma' < s_2 < \sigma'' < s_3.$$

Per rendere ancor più precisi i limiti di questa separazione, consideriamo le tre equazioni

$$\frac{d(\sigma)}{dL} = 0, \quad \frac{d(\sigma)}{dM} = 0, \quad \frac{d(\sigma)}{dN} = 0,$$

ed in ciascuna di esse denotiamo in generale per σ' la più piccola, e per σ'' la più grande delle due radici. Tanto σ' , quanto σ'' avrà tre valori. I valori più piccolo e più grande s' intendano segnati quanto a σ' per (σ'_0, σ'_1) , e quanto a σ'' per (σ''_0, σ''_1) . Avremo la gradazione

$$(a) \quad s_1 < \sigma'_0 < \sigma'_1 < s_2 < \sigma''_0 < \sigma''_1 < s_3.$$

CRITERII PER CONOSCERE LA SPECIE DELLA SUPERFICIE (E). Tenendo conto di questi limiti (a) delle radici s_1, s_2, s_3 , potremo facilmente determinare i loro segni. E poichè, se si riferisce la superficie (E) agli assi principali, nella nuova equazione che la rappresenta i termini della 2^a dimensione sono

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2,$$

dall'esame de' segni delle radici s_1, s_2, s_3 , e dal loro valore finito o zero, non che dal segno e dal valore finito o zero de' termini Θ, Ω , si avranno i criterii per conoscere la specie di superficie rappresentata dalla (E).

Superficie di rivoluzione. Acciocchè due delle tre radici s_1, s_2, s_3 riescano eguali, debbono verificarsi le relazioni

$$(b) \quad 0 = \frac{d(\sigma)}{dL} = \frac{d(\sigma)}{dM} = \frac{d(\sigma)}{dN},$$

$$(c) \quad 0 = \frac{d(\sigma)}{dL'} = \frac{d(\sigma)}{dM'} = \frac{d(\sigma)}{dN'};$$

delle quali le tre ultime (c) sono una conseguenza delle prime (b), e viceversa. Infatti guardando alla gradazione (a) si vede che non può riuscire $s_1 = s_2$ se non risulti $\sigma'_0 = \sigma'_1$; nè può riuscire $s_2 = s_3$ se non risulti $\sigma''_0 = \sigma''_1$. Le equazioni (b) avranno in comune nel 1.^o caso la loro minor radice σ' , e nel 2.^o caso la maggiore σ'' . Inoltre, a causa delle identità di cui è tipo la (1), l'annullarsi di (σ) e delle (b) trae seco l'annullamento delle (c), e viceversa.

Sfera. Per la sfera dovendo riuscire uguali le tre radici di $s = 0$, dovranno riuscire uguali anche i limiti che le separano. Si avrà dunque $0 = L = M = N = L' = M' = N'$, e per conseguenza

$$\frac{s}{9y^2} = \frac{A}{f^2} = \frac{B}{g^2} = \frac{C}{h^2} = \frac{A'}{gh \cos(gh)} = \frac{B'}{hf \cos(hf)} = \frac{C'}{fg \cos(fg)}.$$

Di qui per ragion di simmetria si conchiude in generale

$$\begin{aligned} \frac{s}{9y^2} &= \frac{E_t + E_x - 2E_{tx}}{f^2} = \frac{E_t + E_y - 2E_{ty}}{g^2} = \frac{E_t + E_z - 2E_{tz}}{h^2} \\ &= \frac{E_y + E_z - 2E_{yz}}{f_1^2} = \frac{E_x + E_z - E_{xz}}{g_1^2} = \frac{E_x + E_y - 2E_{xy}}{h_1^2} \\ &= \frac{E_t + E_{yz} - E_{ty} - E_{tz}}{gh \cos(gh)} = \text{ec.} \end{aligned}$$

dove il valor comune di questi rapporti si può fare uguale ad una quantità arbitraria. Inoltre si avrà $S = s$, ossia

$$E(al, bm, cn, dp) = s,$$

formola notevole in ciò che ad essa dee soddisfare una direzione qualsivoglia $lmnp$.

Applichiamo le formole precedenti al caso di

$$0 = E_x = E_y = E_z = E_t.$$

Sotto questa forma la (E) rappresenterà una superficie di 2.^o grado circoscritta al tetraedro fondamentale, ed affinchè rappresenti una sfera (fatto $s = -9V^2$) si dovrà avere

$$\begin{aligned} 2E_{tx} &= f^2, & 2E_{ty} &= g^2, & 2E_{tz} &= h^2, \\ 2E_{yz} &= f_1^2, & 2E_{zx} &= g_1^2, & 2E_{xy} &= h_1^2; \end{aligned}$$

onde le $(E) = 0$ ed $S = s$ si mutano in

$$f^2tx + g^2ty + h^2tz + f_1^2yz + g_1^2zx + h_1^2xy = 0,$$

$$\begin{cases} da f^2pl + db g^2pm + dc h^2pn \\ + bcf_1^2mn + cag_1^2nl + abh_1^2lm = -9V^2. \end{cases}$$

Ricorrendo poi alla $(r)_1$ ed alla $(r)_2$, e ponendo nella 1.^a $s = -9V^2$, ed avvertendo che nella 2.^a le radici in r^2 sono eguali, si raccoglierà

$$r^2 = \frac{\Omega}{\Theta}, \quad r^6 = -36V^2 \frac{\Omega^3}{\Theta^4},$$

e da queste: $(3.4V)^2 = -4\Theta$, $(4.6Vr)^2 = -4^2\Omega$. Ma Ω , fatte le debite sostituzioni, fornisce

$$-4^2\Omega = 2[(ff_1gg_1)^2 + (gg_1hh_1)^2 + (hh_1ff_1)^2 - (ff_1)^4 - (gg_1)^4 - (hh_1)^4];$$

$$4 \frac{d\Omega}{dE_x} = (ghf_1)^2, \text{ ec.}; \quad 4 \frac{d\Omega}{dE_{xy}} = h^2[(hh_1)^2 - (ff_1)^2 - (gg_1)^2], \text{ ec.}$$

e quindi

$$-4\Theta = \begin{vmatrix} (f^2 + f_1^2)[(gg_1)^2 + (hh_1)^2 - (ff_1)^2] & (ghf_1)^2 \\ (g^2 + g_1^2)[(hh_1)^2 + (ff_1)^2 - (gg_1)^2] & (hfg_1)^2 \\ (h^2 + h_1^2)[(ff_1)^2 + (gg_1)^2 - (hh_1)^2] & (fgh_1)^2 \end{vmatrix}.$$

Si sono così spontaneamente offerte le

$$(3.4V)^2 = -4\Theta, \quad (4.6Vr)^2 = -4^2\Omega,$$

formole cognite che esprimono il volume V del tetraedro, ed il raggio r della sfera circoscritta in funzione de' sei spigoli (f, g, h, f_1, g_1, h_1) .

§ 2° Discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate tetraedriche
di un piano mobile.

L'equazione $F(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$, omogenea rispetto alle ξ, η, ζ, τ , e di cui il 1° membro sarà indicato per F , sia la seguente

$$F_x \xi^2 + F_y \eta^2 + F_z \zeta^2 + F_t \tau^2 \\ + 2(F_{yz} \eta \zeta + F_{zx} \zeta \xi + F_{xy} \xi \eta + F_{tx} \tau \xi + F_{ty} \tau \eta + F_{tz} \tau \zeta) = 0,$$

dove le coordinate ξ, η, ζ, τ sono le perpendicolari che dai vertici del tetraedro fondamentale scendono sul piano mobile, involupante la superficie (F) . Il punto ove questo piano, = *ris.* $(a\xi, b\eta, c\zeta, d\tau)$, tocca la superficie curva (la quale non dee suporsi sviluppabile) è dato dall'equazione

$$\frac{dF}{d\xi} \xi' + \frac{dF}{d\eta} \eta' + \frac{dF}{d\zeta} \zeta' + \frac{dF}{d\tau} \tau' = 0,$$

vale a dire, è il baricentro de' pesi x, y, z, t posti ne' vertici A, B, C, D del tetraedro e proporzionali alle quantità $\frac{dF}{d\xi}, \frac{dF}{d\eta}, \frac{dF}{d\zeta}, \frac{dF}{d\tau}$; il che dà luogo alle quattro equazioni

$$(1) \quad \frac{dF}{d\xi} = 2\lambda x, \quad \frac{dF}{d\eta} = 2\lambda y, \quad \frac{dF}{d\zeta} = 2\lambda z, \quad \frac{dF}{d\tau} = 2\lambda t.$$

Chiamato o il comun denominatore delle ξ, η , ec. espresse in funzione di x, y, z, t , e fatto

$$E_x = \frac{do}{dF_x}, \quad E_y = \frac{do}{dF_y}, \text{ ec.} \quad 2E_{yz} = \frac{do}{dF_{yz}}, \text{ ec.},$$

si avrà

$$(2) \quad \begin{cases} o\xi = \lambda (E_x x + E_{xy} y + E_{xz} z + E_{xt} t) \\ o\eta = \lambda (E_{yz} x + E_y y + E_{yz} z + E_{yt} t) \\ \text{ec.} = \text{ec.} \end{cases}$$

Ora se queste si moltiplicano rispettivamente per x, y, z, t , e poi si sommano i prodotti, si ottiene

$$(E) \quad \begin{cases} E_x x^2 + E_y y^2 + E_z z^2 + E_t t^2 + 2(E_{yz} yz + \text{ec.}) \\ = \frac{o}{\lambda} (x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau), \end{cases}$$

di cui il primo membro si denoterà per E . Ma se invece si moltiplicano le (1) rispettivamente pe ξ, η, ζ, τ , la somma de' prodotti darà

$$\lambda (x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau) = \frac{dF}{d\xi} \xi + \frac{dF}{d\eta} \eta + \text{ec.} = 2F,$$

e per conseguenza con $F = 0$, risulterà

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = 0, \text{ ed } E = 0.$$

Così rendesi manifesto che le due equazioni $F = 0$ ed $E = 0$ rappresentano la medesima superficie con questo solo divario, che la 1.^a la rappresenta come *inviluppo* del piano mobile $= \text{ris.}(a\xi, b\eta, c\zeta, d\tau)$, e la 2.^a come *luogo* del punto mobile $= \text{baric.}(x, y, z, t)$. Ne conseguita che la discussione della (F) riducesi a quella già eseguita della (E). Si fa astrazione dal caso di $\omega = 0$, pel quale le (2) darebbero per le coordinate ξ, η, ζ, τ del piano tangente valori indeterminati $= \frac{0}{0}$, si fa cioè astrazione dal caso in cui la

(F) potrebbe rappresentare sia due punti, sia una semplice conica.

Giova notare che tra ω , determinante ad elementi F_x, F_y ec., F_{yz} , ec., ed Ω , determinante ad elementi E_x, E_y , ec., E_{yz} , ec. *reciproci* de' precedenti, passano le relazioni:

$$\Omega = \omega^3, \quad \frac{d\Omega}{dE_x} = \omega^2 F_x, \quad \frac{d\Omega}{dE_{xy}} = \omega^2 \cdot 2F_{xy}, \text{ ec.}$$

Ond' è che se si pone

$$\Theta = F_x + F_y + F_z + F_t + 2(F_{yz} + F_{zx} + F_{xy} + F_{tx} + F_{ty} + F_{tz}),$$

sarà

$$\Theta = \theta \omega^2.$$



ERRATA

Pag. 4, linea 10, *salendo* — CORRISPONDENZA SCIENTIFICA di Roma — leggi: RACCOLTA SCIENTIFICA compilata in Roma dal Dott. C. Palomba e Compagni, Volumi V, dal 1845 al 1849.

Pag. 56, lin. 10 *sal.* $A'l + B'm$ — leggi: $A'al + B'bm$.

Pag. 70, lin. 8, *sal.* — $A''l + B''m + C''n$ — leggi: $A''al + B''bm + C''cn$.

INDICE

ARTICOLO I.

*Definizione de' sistemi semplici di coordinate
sia di punti, sia di rette, sia di piani.*

1. Sistemi semplici di coordinate nel piano	pag. 6
2. Sistemi semplici di coordinate nello spazio	» 10

ARTICOLO II.

Principii da cui si derivano le leggi de' sistemi semplici.

1. Relazione tra i momenti di più rette situate in un piano ed il momento della loro risultante. Momento di una coppia di rette. Rette variabili prese sopra i lati di un triangolo e loro risultante	» 13
2. Relazione tra i momenti di più aree nello spazio ed il momento dell'area risultante. Momento di una coppia di aree. Aree variabili prese sopra i piani delle facce di un tetraedro, ed area risultante	» 17
3. Definizione del punto risultante di più punti affetti da coefficienti numerici. Proprietà del punto risultante rispetto ai punti componenti	» 20
4. Relazione tra i momenti di più punti ed il momento del punto risultante. Pesi variabili ne' vertici di un triangolo e di un tetraedro, e conseguenze rispetto al punto risultante	» 23

ARTICOLO III.

Sistemi semplici delle coordinate più in uso.

1. Sistema di coordinate componenti e di coordinate proiezioni con origine comune	» 29
2. Sistema di coordinate segmentarie sovr' assi divergenti da un punto. »	35
3. Sistema di coordinate segmentarie sovr' assi paralleli	» 38
4. Sistema di coordinate triangolari di punti e di rette	» 41
5. Sistema di coordinate tetraedriche di punti e di piani	» 46

ARTICOLO IV.

Discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate triangolari.

1.° Di punti	» 50
2.° Di rette	» 62

ARTICOLO V.

Discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate tetraedriche.

1.° Di punti	» 65
2.° Di piani	» 79

N. B. Per ciò che riguarda il principio della retta e dell'area risultante si può consultare (come preliminare di questa Memoria) l'Appendice che ho posta in fine degli ELEMENTI DI MECCANICA RAZIONALE. Quest'opera si vende in Bologna dall'editore Giuseppe Legnani (Via S. Sigismondo N. 3081).



